

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Prova scritta di Sistemi Dinamici

20 giugno 2025

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (\mu - 1)(x^2 + \mu^2 - 1)(\mu - x)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro $\mu \in \mathbb{R}$ e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Un sistema di equazioni differenziali è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(4 - 2y) \\ \dot{y} = y(2x - 2k). \end{cases}$$

Si trovino le posizioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità, anche asintotica, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

3. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y \\ \dot{y} = \alpha x + y \end{cases}$$

e se ne discuta la stabilità, evidenziandone fuochi, nodi, selle, centri.

4. Si studi la stabilità degli equilibri del sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = \alpha x_h(1 + x_h^2), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si dica se esistono 2-cicli.