

# UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

## Prova scritta di Sistemi Dinamici

6 giugno 2025

1. Data la famiglia di equazioni differenziali

$$\dot{x} = (x^2 - 1)(\mu - 1 - x^2)$$

si chiede di studiarne la stabilità delle posizioni di equilibrio al variare del parametro  $\mu \in \mathbb{R}$  e di tracciarne il diagramma di biforcazione.

2. Un sistema di equazioni differenziali è della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^5 - ky^3 \\ \dot{y} = \sin x - ky. \end{cases}$$

Si discuta la stabilità, anche asintotica, della posizione nulla al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .

3. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(x - y) \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

e se ne discuta la stabilità, evidenziandone fuochi, nodi, selle, centri.

4. Si studi la stabilità degli equilibri del sistema dinamico discreto unidimensionale

$$x_{h+1} = 2\alpha x_h - x_h^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nel caso  $\alpha = 1$  si dica se esistono 2-cicli.