

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL S. CUORE  
Sede di Brescia  
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

# SISTEMI DINAMICI

**Appunti a cura di A. Musesti**

Anno Accademico 2025-2026

Versione del 6 maggio 2026

## Indice

<b>1</b>	<b>Un esempio introduttivo: i modelli epidemiologici</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Semigrupperi e processi</b>	<b>10</b>
<b>4</b>	<b>Esistenza globale</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Equilibrio e stabilità</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Sistemi differenziali lineari</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Esponenziale delle matrici <math>2 \times 2</math></b>	<b>20</b>
<b>8</b>	<b>Sistemi lineari <math>2 \times 2</math></b>	<b>22</b>
<b>9</b>	<b>Stabilità dei sistemi lineari</b>	<b>24</b>
<b>10</b>	<b>I due metodi di Ljapunov</b>	<b>29</b>
<b>11</b>	<b>Metodo delle isocline</b>	<b>39</b>
<b>12</b>	<b>Sistemi hamiltoniani e sistemi gradiente</b>	<b>39</b>
<b>13</b>	<b>Stabilità nel caso unidimensionale e biforcazione dell'equilibrio</b>	<b>41</b>
<b>14</b>	<b>Insiemi invarianti e attrattori</b>	<b>44</b>

<b>15 Attrattori e cicli limite</b>	<b>46</b>
<b>16 Modelli di dinamica delle popolazioni</b>	<b>50</b>
<b>17 Modelli economici</b>	<b>59</b>
<b>18 Sistemi dinamici discreti</b>	<b>63</b>
<b>19 Mappe iterate unidimensionali</b>	<b>68</b>
<b>20 La mappa logistica discreta</b>	<b>74</b>
<b>21 Il Teorema di Sharkovsky</b>	<b>77</b>
<b>22 Definizioni di caos</b>	<b>78</b>

# 1 Un esempio introduttivo: i modelli epidemiologici

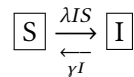
Un'applicazione interessante (e molto attuale) dei sistemi dinamici è quella dedicata allo studio della diffusione di malattie contagiose. Vedremo in questa sezione alcuni semplici modelli introduttivi. Denoteremo con  $S(t)$  il numero dei *suscettibili* (susceptible), cioè gli individui che possono ammalarsi, con  $I(t)$  il numero degli *infetti* (infectious), che possono poi contagiare gli altri, e con  $R(t)$  il numero dei *rimessi* (recovered), cioè dei guariti dalla malattia e che non sono più contagiabili (in questo numero, ahimé, possono rientrare anche i deceduti, nel caso in cui la malattia possa avere conseguenze gravi). Per comodità supporremo  $S + I + R = N$  costante, dove  $N$  è il numero totale di individui, e normalizzeremo tutto con  $N$ , in modo da avere

$$0 \leq S, I, R \leq 1, \quad S + I + R = 1.$$

Questi modelli si dicono *compartimentali*, perché la popolazione viene suddivisa in sottoinsiemi (compartimenti) e si assume che tutti gli elementi di ogni compartimento abbiano le stesse caratteristiche. Tali modelli furono introdotti dagli scozzesi Kermack e McKendrick nel 1927.

## 1.1 Il modello SIS

Il modello più semplice è quello di una malattia non mortale che può essere contratta tante volte: in questo caso non ci sono i rimessi e  $S + I = 1$ . La dinamica tipica è



ovvero il numero di infetti cresce in modo proporzionale sia al numero attuale di infetti che al numero di suscettibili, mentre decresce in modo proporzionale al solo numero di infetti. Il parametro  $\lambda$ , detto *tasso di contatto*, è legato alla contagiosità e al numero di contatti (numero di contagi per infetto nell'unità di tempo), mentre  $\gamma$  è legato alla velocità di guarigione (inverso della durata media della malattia). Il modello diventa

$$\begin{cases} \dot{S} = -\lambda IS + \gamma I \\ \dot{I} = \lambda IS - \gamma I \end{cases}$$

e poiché  $S + I = 1$  ci si riduce a una sola ODE del primo ordine:

$$\frac{\dot{I}}{I} = \lambda - \gamma - \lambda I$$

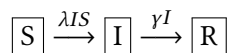
che ha soluzione

$$I(t) = \frac{KI_0}{I_0 + (K - I_0)e^{-qt}},$$

dove abbiamo posto  $q = \lambda - \gamma$  e  $K = 1 - \frac{\gamma}{\lambda}$  (si veda il modello logistico (9) nella Sezione 16). Quindi per  $t \rightarrow +\infty$  la frazione degli infetti tende a  $K$  nel caso  $\lambda > \gamma$ , resta costantemente  $I_0$  nel caso  $\lambda = \gamma$ , e tende a 0 nel caso  $\lambda < \gamma$ . Nel primo caso si dice che la malattia resta *endemica*, perché il numero degli infetti non tende a 0.

## 1.2 Il modello SIR

Si tratta del modello più famoso. La dinamica tipica è



dove i coefficienti  $\lambda, \gamma$  hanno lo stesso significato del modello SIS, ma stavolta i guariti non sono più suscettibili. Il numero

$$R_0 := \frac{\lambda}{\gamma}$$

viene chiamato *basic reproduction number* (numero di riproduzione di base) e rappresenta il numero medio di individui contagiati da un singolo infetto durante tutta la fase infettiva.

Il modello differenziale diventa

$$\begin{cases} \dot{S} = -\lambda IS \\ \dot{I} = \lambda IS - \gamma I \\ \dot{R} = \gamma I \end{cases}$$

e, poiché  $R = 1 - S - I$ , possiamo ricondurlo al sistema bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{S} = -\lambda IS \\ \dot{I} = \lambda IS - \gamma I. \end{cases}$$

Tale sistema dovrà essere dotato di condizioni iniziali  $S(0), I(0) > 0, S(0) + I(0) = 1$ , poiché all'inizio non ci sono rimessi.

Studiamo questo sistema: le posizioni di equilibrio sono tutte le posizioni  $(\bar{S}, 0)$ , che dunque prevedono l'assenza della malattia, e la matrice del sistema linearizzato<sup>(1)</sup> è

$$\begin{bmatrix} 0 & -\lambda \bar{S} \\ 0 & \lambda \bar{S} - \gamma \end{bmatrix}$$

per cui se  $\bar{S} > \frac{\gamma}{\lambda} = \frac{1}{R_0}$  l'equilibrio è instabile e se  $\bar{S} \leq \frac{1}{R_0}$  non possiamo concludere niente. In particolare, poiché  $\bar{S} \in [0, 1]$ , se  $R_0 > 1$  esistono dei valori di  $\bar{S}$  per cui la posizione è instabile e quindi la malattia si diffonde.

Cerchiamo di capire che cosa succede alle traiettorie: poiché  $\dot{S}(t) \leq 0$ , la funzione  $S(t)$  è decrescente e dunque  $S(t) \leq S(0)$  per ogni  $t \geq 0$  ed esiste il limite

$$S(\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) \in [0, 1].$$

Inoltre anche la funzione  $S(t) + I(t)$  è decrescente, perché

$$\dot{S} + \dot{I} = -\gamma I \leq 0 \tag{1}$$

e quindi  $S(t) + I(t) \leq S(0) + I(0)$  per ogni  $t \geq 0$  ed esiste il limite

$$S(\infty) + I(\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) + I(t) \in [0, 2].$$

<sup>(1)</sup>Questi concetti sono introdotti e studiati più avanti, questo è solo un esempio introduttivo.

In particolare esiste il limite  $I(\infty)$ . Integrando la (1) da 0 a  $+\infty$  si ha

$$S(\infty) + I(\infty) - S(0) - I(0) = -\gamma \int_0^{+\infty} I(\tau) d\tau \Rightarrow \int_0^{+\infty} I(\tau) d\tau < +\infty,$$

e dunque  $I(t)$  è una funzione integrabile su  $[0, +\infty)$  che ammette limite  $I(\infty)$ , quindi per forza  $I(\infty) = 0$ .

Ora analizziamo che cosa succede al variare della condizione iniziale:

- Se  $S(0) \leq 1/R_0$ , allora dalla seconda equazione  $\dot{I}(t) \leq 0$  per ogni  $t \geq 0$  e quindi  $I(t)$  è decrescente. Poiché  $I(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , la malattia decresce e scompare.
- Nel caso  $S(0) > 1/R_0$  si ha  $\dot{I}(0) > 0$  e dunque inizialmente la malattia si diffonde. Poiché però  $I(t)$  è destinata a diventare 0, da un certo istante  $t^*$  in poi il numero degli infetti comincerà a decrescere e si dovrà avere  $S(t) \leq 1/R_0$  per  $t \geq t^*$ : l'istante  $t^*$  in cui  $S(t^*) = 1/R_0$  è il momento del famoso *picco* dei contagi.

Si possono trovare in modo esplicito le orbite nel piano delle fasi: pensando  $I(S)$  come funzione di  $S$  e dividendo la seconda equazione per la prima, si ottiene

$$I'(S) = \frac{\lambda IS - \gamma I}{-\lambda IS} = -1 + \frac{1}{R_0 S}$$

e quindi integrando rispetto a  $S$  si ha

$$I(S) = -S + \frac{1}{R_0} \ln S + c.$$

Imponendo la condizione iniziale  $I(S(0)) = I(0)$  si trova

$$I(0) = -S(0) + \frac{1}{R_0} \ln S(0) + c \Rightarrow c = I(0) + S(0) - \frac{1}{R_0} \ln S(0) = 1 - \frac{1}{R_0} \ln S(0)$$

e dunque

$$I(S) = -S + \frac{1}{R_0} \ln S + 1 - \frac{1}{R_0} \ln S(0) = 1 - S + \frac{1}{R_0} \ln \frac{S}{S(0)}. \quad (2)$$

Troviamo un grafico di tali orbite nella Figura 1.

È interessante capire dove si trova il massimo delle curve  $I(S)$ , che rappresenta il picco del contagio: basta calcolare

$$I'(S) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R_0 S} = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{R_0}$$

e dunque il punto di massimo non dipende dalle condizioni iniziali. Il valore massimo è

$$I_{\max} = I\left(\frac{1}{R_0}\right) = 1 - \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_0} \ln \frac{1}{R_0 S(0)}.$$

Si veda la Figura 2. Per  $R_0$  grande, il numero massimo di contagi cresce, quindi c'è interesse a fare in modo che  $R_0$  sia piccolo per "abbassare la curva" (*flatten the curve*).

Abbiamo detto che  $I(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ ; ma che cosa succede a  $S(t)$ ? Denotiamo con  $S(\infty)$  il limite di  $S(t)$  per  $t \rightarrow +\infty$ : dall'equazione (2) otteniamo

$$0 = 1 - S(\infty) + \frac{1}{R_0} \ln \frac{S(\infty)}{S(0)}$$

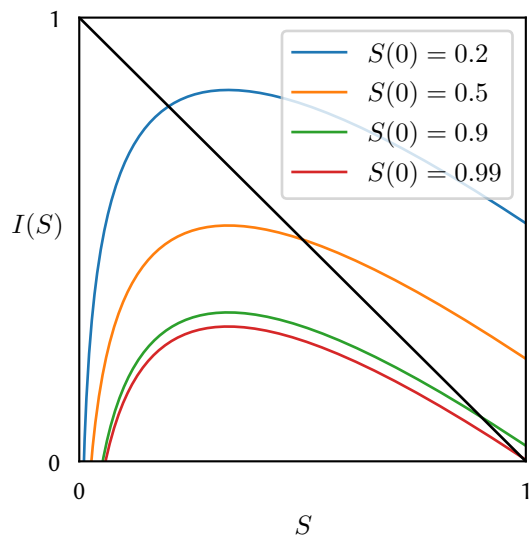


Figura 1: Orbite nel piano  $S - I$  per  $R_0 = 3$ .

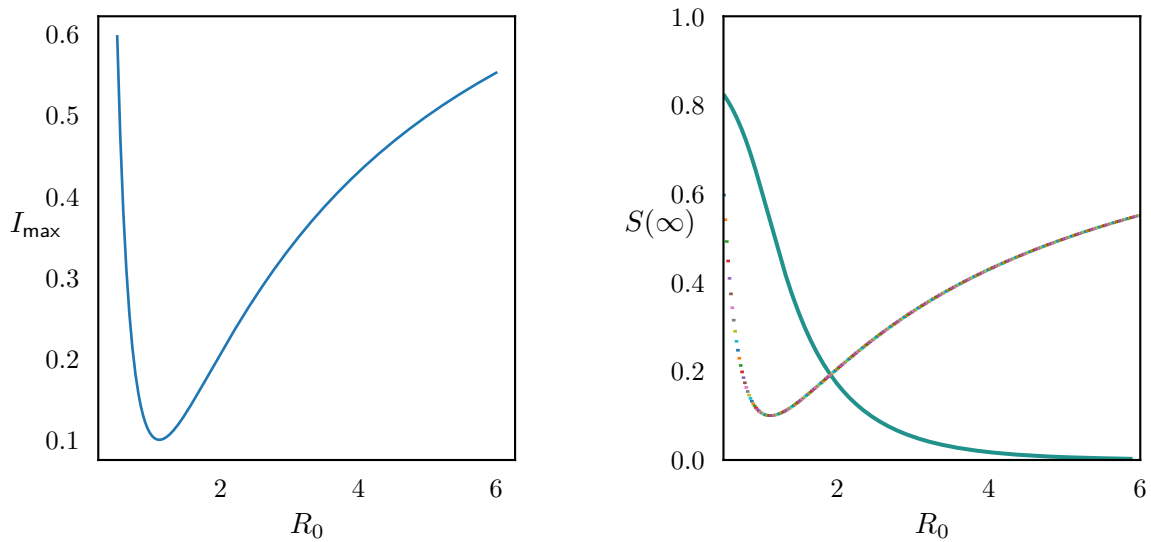


Figura 2: L'andamento di  $I_{\max}$  e di  $S(\infty)$  in funzione di  $R_0$ , per  $S(0) = 0.9$ .

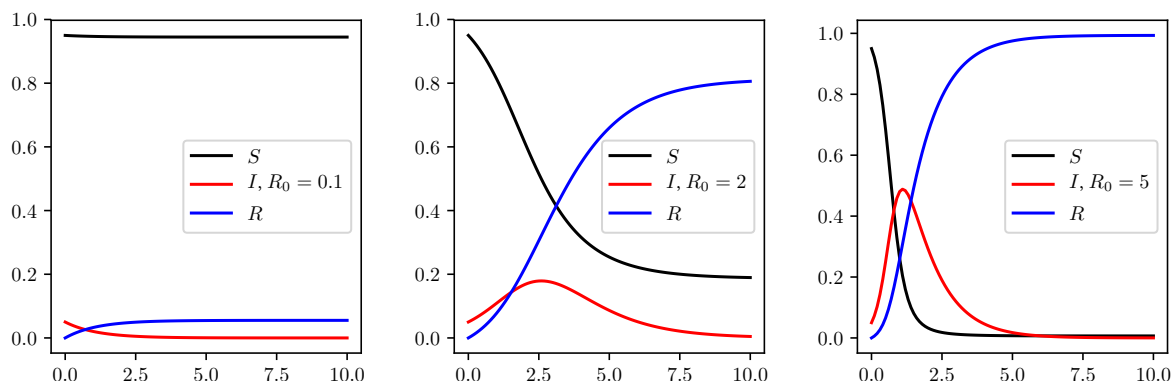


Figura 3: Alcune traiettorie del modello SIR.

da cui possiamo ricavare il valore di  $S$ . Si tratta di un'equazione trascendente ma possiamo disegnare il grafico della soluzione al variare di  $R_0$ : si ottiene una curva decrescente. Anche in questo caso, ridurre il valore di  $R_0$  significa mantenere elevato il numero di individui che non contraggono la malattia.

Si possono studiare anche altri fenomeni interessanti nei modelli epidemiologici compartimentali. Si può introdurre un tasso di natalità e di mortalità naturale nel modello SIR, oppure aggiungere la classe  $D$  dei *deceduti* per la malattia (modello SIRD). Se la malattia ha un tempo di incubazione significativo, si introduce la classe  $E$  degli *esposti*, cioè gli individui che hanno contratto la malattia ma non sono ancora contagiosi, dando luogo ai modelli SEIR e SEIS. Se gli individui alla nascita hanno una immunità temporanea (dovuta al sistema immunitario materno), si introduce la classe  $M$  dei neonati immuni, dando luogo ai modelli MSIR e MSEIR. Oppure si possono considerare modelli stratificati in funzione dell'età (*age-structured models*), in cui la diffusione della malattia dipende anche dall'età degli individui: in questo caso si ottengono equazioni integro-differenziali.

## 2 Sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

**Definizione 2.1.** Un sistema di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in forma normale è dato da

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t)$$

dove  $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $I$  intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Se  $\mathbf{F}$  non dipende esplicitamente da  $t$  il sistema si dice *autonomo*.

Si chiama *problema ai valori iniziali* il problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

dove  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $t_0 \in I$ . ★

Di solito si prende  $\mathbf{F}$  regolare, ad esempio  $C^1$  (o almeno lipschitziana), in modo che valga il Teorema di Cauchy di esistenza e unicità locale della soluzione del problema ai valori iniziali.

**Proposizione 2.2.** Ogni problema ai valori iniziali su  $\mathbb{R}^n$  può essere scritto come problema autonomo su  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathbf{v} := (\mathbf{u}, u_{n+1})$ , e sia

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}) := (\mathbf{F}(\mathbf{u}, u_{n+1}), 1).$$

Consideriamo il problema ai valori iniziali autonomo

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{G}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}(t_0) = (\mathbf{u}_0, t_0). \end{cases}$$

Prendendo l'ultima componente dell'equazione si ha  $\dot{u}_{n+1} = 1$  da cui, considerando anche la condizione iniziale,  $u_{n+1} = t$  e quindi le prime  $n$  componenti diventano

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0. \end{cases} \quad \square$$

**Esempio 2.3.** Per avere l'esistenza di soluzioni è sufficiente richiedere che  $\mathbf{F}$  sia continua (Teorema di Peano). Però se  $\mathbf{F}$  è solo continua ci può essere molteplicità. Si consideri ad esempio il problema autonomo unidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Chiaramente la soluzione nulla soddisfa il problema, ma separando le variabili si ha anche

$$\frac{1}{3}\dot{x}x^{-2/3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x} = t + c \quad \Rightarrow \quad x(t) = t^3$$

che è un'altra soluzione. Anzi, tutte le funzioni del tipo

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq t_0 \\ (t - t_0)^3 & \text{per } t \geq t_0 \end{cases}$$

sono soluzioni per ogni  $t_0 > 0$  (pennello di Peano). ★

**Esempio 2.4.** Le soluzioni possono non essere globali: si consideri il problema unidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 > 0. \end{cases}$$

Si ha

$$\dot{x}x^{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x} = t + c \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

che è definita solo per  $t < 1/x_0$  e non c'è modo di estenderla oltre.

Se il secondo membro è *sublineare* in  $\mathbf{u}$ , ovvero se

$$|\mathbf{F}(\mathbf{u}, t)| \leq a + b|\mathbf{u}|$$

per qualche costante  $a, b$ , allora la soluzione è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . ★

**Osservazione 2.5.** Il caso di sistemi del primo ordine non è restrittivo, infatti ogni sistema differenziale di ordine  $k$  può essere ricondotto ad uno del primo ordine: consideriamo il sistema

$$\frac{d^k \mathbf{u}}{dt^k}(t) = \mathbf{F} \left( \mathbf{u}(t), \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t), \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}(t), \dots, \frac{d^{k-1}\mathbf{u}}{dt^{k-1}}(t), t \right)$$

dove  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{nk} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Introducendo la nuova variabile

$$\mathbb{R}^{nk} \ni \mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$$

e il sistema del primo ordine

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = (\mathbf{v}_2(t), \dots, \mathbf{v}_k(t), \mathbf{F}(\mathbf{v}(t), t))$$

si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{v}_2(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_2(t) = \mathbf{v}_3(t) \\ \dots \\ \dot{\mathbf{v}}_k(t) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t), t). \end{cases}$$

In particolare, l'ultima equazione corrisponde al sistema di partenza. ★

Il caso importante del problema ai valori iniziali per un sistema del secondo ordine

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t), t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \mathbf{u}_1 \end{cases}$$

corrisponde quindi al problema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{v}_2(t) \\ \dot{\mathbf{v}}_2(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}_2(t), t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{v}_2(t_0) = \mathbf{u}_1. \end{cases}$$

**Definizione 2.6.** Dato il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

con  $\mathbf{F}$  regolare, denoteremo con

$$\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0)$$

la sua (unica) soluzione calcolata all'istante  $t$ . L'insieme

$$\gamma^+(\mathbf{u}_0) := \{\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0) : t \geq t_0\} \subset \mathbb{R}^n$$

si dice *orbita positiva* uscente da  $\mathbf{u}_0$ , mentre l'insieme

$$\gamma(\mathbf{u}_0) := \{\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^n$$

si dice *orbita completa* uscente da  $\mathbf{u}_0$ . L'insieme

$$\{(t, \mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0)) : t \in I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

si dice *traiettoria* uscente da  $\mathbf{u}_0$ .

L'insieme  $\mathbb{R}^n$  è detto *spazio delle fasi*, l'insieme  $\mathbb{R}^{n+1}$  *spazio esteso*. ★

**Esempio 2.7.** Ad esempio, nel caso  $n = 1$  lo spazio delle fasi è  $\mathbb{R}$  mentre lo spazio esteso è  $\mathbb{R}^2$ . Per il sistema unidimensionale

$$\dot{x} = x$$

si ha  $x(t; 0, 1) = e^t$  e l'orbita positiva uscente da 1 è l'intervallo  $(1, +\infty)$ , l'orbita completa è l'intervallo  $(0, +\infty)$ , mentre la traiettoria è la curva  $(t, e^t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . ★

**Esempio 2.8.** Per il sistema bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

la soluzione è  $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ , l'orbita è la circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  e la traiettoria è l'elica cilindrica  $(t, \cos t, \sin t)$ . ★

### 3 Semigrupp e processi

Consideriamo il sistema autonomo

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}). \tag{A}$$

Per i sistemi autonomi è sempre possibile “traslare l'origine del tempo”, ovvero se  $\mathbf{u} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  è soluzione di (A), allora anche  $\mathbf{v} : (I - \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definita da  $\mathbf{v}(t) := \mathbf{u}(t + \tau)$  è ancora soluzione di (A). Infatti si ha

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t + \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t + \tau)) = \mathbf{F}(\mathbf{v}(t)).$$

Quindi nei sistemi autonomi si può sempre scegliere  $t_0 = 0$ , ovvero

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

con  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t + t_0)$ .

**Definizione 3.1 (Semigrupp associato).** Consideriamo il sistema autonomo (A). La famiglia di funzioni  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  definita da

$$\begin{aligned} S_t : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{u}(t; 0, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

si chiama *semigrupp (continuo) associato* al sistema. ★

Quindi la funzione  $S_t$  associa ad ogni “condizione iniziale”  $x$  il valore della soluzione all’istante  $t$  uscente da  $x$ . Si noti che un semigruppò è una *famiglia* di funzioni.

**Esempio 3.2.** Data l’equazione unidimensionale  $\dot{x} = x$ , il suo semigruppò associato è

$$\begin{aligned} S_t : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^t x. \end{aligned} \quad \star$$

**Esempio 3.3.** Il semigruppò associato all’equazione bidimensionale (oscillatore armonico)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

è dato da

$$\begin{aligned} S_t : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad \star$$

**Esercizio 3.4.**

(1) Si trovi il semigruppò associato a  $\dot{x} = 1 + x^2$ .

(2) Si trovi il semigruppò associato a

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$

**Teorema 3.5 (Proprietà dei semigruppò).** *Dato un semigruppò associato a un sistema autonomo, per ogni  $t, s \geq 0$  si ha*

(1)  $S_0 = Id$ ;

(2)  $S_{t+s} = S_t \circ S_s$ .

*Dimostrazione.* La prima proprietà è ovvia.

Per la seconda: sia  $x \in \mathbb{R}^n$  e sia  $v(t) := S_{t+s}x = u(t + s; 0, x)$ . Allora  $v$  è la soluzione di

$$\begin{cases} \dot{v} = F(v) \\ v(0) = u(s). \end{cases}$$

Ma poiché l’equazione differenziale non è cambiata, si ha

$$S_{t+s}x = v(t) = S_t v(0) = S_t u(s) = S_t S_s x,$$

quindi  $S_{t+s} = S_t \circ S_s$ . □

**Definizione 3.6.** Se le funzioni del semigruppò  $\{S_t\}$  sono invertibili, si dice che il semigruppò è *invertibile*. Poniamo

$$S_{-t} := S_t^{-1}. \quad \star$$

**Teorema 3.7.** Dato un semigruppato  $\{S_t\}$  invertibile, si ha

$$S_{t+s} = S_t \circ S_s$$

per ogni  $s, t \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Vediamo il caso  $t \leq 0, s \geq 0, t+s \geq 0$ . Sia  $x \in \mathbb{R}^n$ ; dalle proprietà dei semigruppato si ha

$$S_s x = S_{-t} S_{t+s} x \quad \Rightarrow \quad S_{-t}^{-1} S_s x = S_{t+s} x$$

da cui  $S_t \circ S_s = S_{t+s}$ .

Vediamo ora il caso  $t \leq 0, s \geq 0, t+s \leq 0$ . Ponendo  $y = S_{-t}^{-1} x$ , si ha

$$S_{-t} y = S_{-t-s} S_s y \quad \Rightarrow \quad x = S_{-t-s} S_s S_{-t}^{-1} x$$

da cui

$$S_{t+s} = S_{-t-s}^{-1} = S_s \circ S_{-t}^{-1} = S_s \circ S_t.$$

Per finire, vediamo il caso  $t \leq 0, s \leq 0, t+s \leq 0$ , che dà subito

$$S_{-s} \circ S_{-t} = S_{-s-t} \quad \Rightarrow \quad S_{t+s} = S_{-s-t}^{-1} = S_{-t}^{-1} \circ S_{-s}^{-1} = S_t \circ S_s. \quad \square$$

**Esempio 3.8.** I semigruppato visti negli Esempi 3.2-3.3 sono invertibili e si ha

$$S_{-t} x = e^{-t} x$$

nel primo caso e

$$S_{-t}(x, y) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

nel secondo caso. ★

**Definizione 3.9 (Semigruppato).** Una famiglia di funzioni  $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  continue da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^n$  si dice *semigruppato* (o *sistema dinamico*) se verifica

(1)  $S_0 = \text{Id}$ ;

(2)  $S_{t+s} = S_t \circ S_s$  per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ . ★

Abbiamo visto che ad ogni sistema differenziale è associato un semigruppato. Sotto opportune regolarità è vero anche il viceversa.

**Proposizione 3.10.** Dato un semigruppato  $\{S_t\}$ , se esiste ed è regolare la funzione

$$F(x) := \left. \frac{d}{dt} S_t x \right|_{t=0}$$

allora  $\{S_t\}$  è il semigruppato associato al sistema  $\dot{u} = F(u)$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  definiamo  $\mathbf{u}(t) := S_t(\mathbf{x})$ ; allora dobbiamo verificare che  $\mathbf{u}$  è soluzione del sistema  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ .

Sapendo che

$$S_{h+t}\mathbf{x} = S_h S_t \mathbf{x} = S_h \mathbf{u}(t)$$

possiamo calcolare

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{d}{dt} S_t \mathbf{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S_{t+h}\mathbf{x} - S_t \mathbf{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{S_h - \text{Id}}{h} \right) S_t \mathbf{x} = \frac{d}{dh} S_h \mathbf{u}(t) \Big|_{h=0} = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t)). \quad \square$$

Passiamo ora ai sistemi differenziali non autonomi.

**Definizione 3.11 (Processo associato).** Dato un sistema differenziale  $\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t)$ , la famiglia di funzioni  $\{U_{\tau,t}\}_{\tau,t \geq 0}$  data da

$$\begin{aligned} U_{\tau,t} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{u}(\tau + t; \tau, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

si chiama *processo (continuo) associato* al sistema. ★

**Esempio 3.12.** Il processo associato all'equazione differenziale unidimensionale

$$\dot{x} = 2tx$$

è dato da

$$U_{\tau,t} x_0 = x_0 e^{t(t+2\tau)} \quad \star$$

**Teorema 3.13 (Proprietà dei processi).** Dato un processo associato a un sistema differenziale, per ogni  $s, t, \tau \geq 0$  si ha

- (1)  $U_{\tau,0} = \text{Id}$ ;
- (2)  $U_{\tau,t+s} = U_{\tau+t,s} \circ U_{\tau,t}$ ;
- (3) se il sistema è autonomo, allora  $U_{\tau,t}$  non dipende da  $\tau$  e  $U_t$  è il semigrupp associato al sistema.

*Dimostrazione.* La prima è facile.

Per la seconda: sia  $\mathbf{u}(t; \tau, \mathbf{x})$  la soluzione del problema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{u}(\tau) = \mathbf{x}. \end{cases}$$

Allora la quantità

$$U_{\tau+t,s} U_{\tau,t} \mathbf{x} = U_{\tau+t,s} \mathbf{u}(\tau + t; \tau, \mathbf{x})$$

è la soluzione al tempo  $\tau + t + s$  del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, t) \\ \mathbf{v}(\tau + t) = U_{\tau,t} \mathbf{x} = \mathbf{u}(\tau + t; \tau, \mathbf{x}). \end{cases}$$

Ma la soluzione di questo problema ai valori iniziali è proprio  $\mathbf{u}$ , quindi la quantità è proprio  $\mathbf{u}$  calcolato all'istante  $\tau + t + s$ . Si ha allora

$$U_{\tau+t,s}U_{\tau,t}\mathbf{x} = U_{\tau+t,s}\mathbf{u}(\tau + t; \tau, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\tau + t + s; \tau, \mathbf{x}) = U_{\tau,t+s}\mathbf{x}.$$

Per la terza: se il sistema è autonomo poniamo

$$\begin{aligned} U_{\tau_1,t}\mathbf{x} = \mathbf{u}(\tau_1 + t) \quad \text{dove } \mathbf{u} \text{ è soluzione di } & \begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(\tau_1) = \mathbf{x} \end{cases} \\ U_{\tau_2,t}\mathbf{x} = \mathbf{v}(\tau_2 + t) \quad \text{dove } \mathbf{v} \text{ è soluzione di } & \begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}(\tau_2) = \mathbf{x}. \end{cases} \end{aligned}$$

Allora la funzione  $\mathbf{w}(t) := \mathbf{v}(t + \tau_2 - \tau_1)$  è soluzione di

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{F}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{w}(\tau_1) = \mathbf{v}(\tau_2) = \mathbf{x} \end{cases}$$

e quindi coincide con  $\mathbf{u}$ . Per cui si ha

$$U_{\tau_1,t}\mathbf{x} = \mathbf{u}(\tau_1 + t) = \mathbf{w}(\tau_1 + t) = \mathbf{v}(\tau_2 + t) = U_{\tau_2,t}\mathbf{x}$$

e quindi  $U_{\tau,t}$  non dipende da  $\tau$ . □

## 4 Esistenza globale

**Definizione 4.1.** Siano  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  di classe  $C^1$ . I due sistemi differenziali autonomi

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}(\mathbf{u})$$

si dicono *topologicamente equivalenti* se esiste un omeomorfismo su  $\mathbb{R}^n$  che mappa le orbite del primo in quelle del secondo, preservandone l'orientazione del tempo. ★

**Teorema 4.2 (Esistenza globale).** Se  $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ , allora il problema autonomo ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u})}{1 + |\mathbf{F}(\mathbf{u})|} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

ammette soluzione definita su tutto  $\mathbb{R}$  per ogni  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Inoltre, i sistemi differenziali

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u})}{1 + |\mathbf{F}(\mathbf{u})|}, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

sono topologicamente equivalenti.

Per la dimostrazione si veda [Perko, pag. 184].

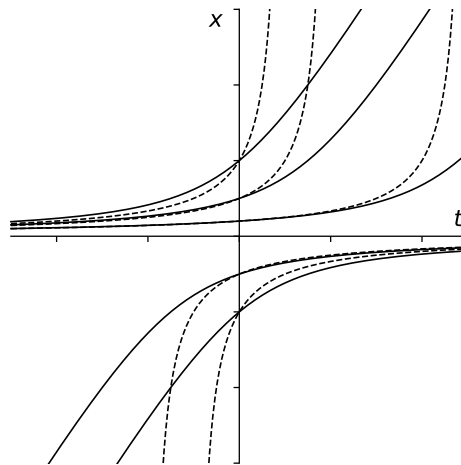


Figura 4: Le traiettorie dell'Esempio 4.3.

**Esempio 4.3.** Abbiamo già visto che il sistema unidimensionale

$$\dot{x} = x^2$$

ha soluzione  $x(t) = x_0/(1 - x_0 t)$  per  $x \neq 0$ , che non è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . Se invece consideriamo il sistema

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

si ha la soluzione  $x(t) = 0$  per  $x_0 = 0$  e

$$x(t) = \frac{t + x_0}{2} - \frac{1}{2x_0} + \frac{x_0}{2|x_0|} \sqrt{t^2 + 2 \left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right) t + \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2}$$

per  $x_0 \neq 0$ . Questa soluzione è definita su tutto  $\mathbb{R}$  e le orbite sono omeomorfe a quelle di partenza. ★

## 5 Equilibrio e stabilità

**Definizione 5.1.** Una *soluzione di equilibrio* è una soluzione costante del sistema differenziale  $\dot{u} = F(u, t)$ , ovvero

$$u(t) = \bar{u} \quad \text{per ogni } t \in I. \quad \star$$

**Proposizione 5.2.** Dato un sistema differenziale  $\dot{u} = F(u, t)$ , una funzione costante  $u(t) = \bar{u}$  è di equilibrio se e solo se

$$F(\bar{u}, t) = 0 \quad \text{per ogni } t \in I.$$

*Dimostrazione.* Immediata. □

In particolare, se il sistema è autonomo le soluzioni di equilibrio sono gli zeri di  $F$ .

**Esempio 5.3.** Le funzioni costanti  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , sono soluzioni di equilibrio per l'equazione non autonoma unidimensionale

$$\dot{x} = t \sin x. \quad \star$$

**Esempio 5.4.** Il sistema bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - y^2 \\ \dot{y} = x^3 - y \end{cases}$$

ha tre soluzioni di equilibrio:  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ . ★

Si noti che le orbite delle soluzioni di equilibrio sono dei punti, mentre le traiettorie sono delle rette parallele all'asse dei tempi.

**Definizione 5.5.** Una soluzione di equilibrio  $\bar{u}$  del sistema autonomo  $\dot{u} = F(u)$  si dice *stabile* (secondo Ljapunov) se per ogni intorno  $V$  di  $\bar{u}$  esiste un intorno  $U$  di  $\bar{u}$  tale che per ogni  $u_0 \in U$  si abbia

$$u(t; 0, u_0) \in V \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

L'equilibrio si dice *instabile* se non è stabile. ★

Poiché  $\mathbb{R}^n$  è uno spazio normato e la topologia usata è quella indotta dalla norma euclidea, si dimostra facilmente che una soluzione di equilibrio  $\bar{u}$  è stabile se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |u_0 - \bar{u}| < \delta \implies \forall t \geq 0 : |u(t; 0, u_0) - \bar{u}| < \varepsilon.$$

**Esempio 5.6.** è facile dimostrare che l'origine è una soluzione di equilibrio stabile per l'oscillatore armonico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \star$$

**Definizione 5.7.** Si dice che una soluzione di equilibrio  $\bar{u}$  *attrae puntualmente* un suo intorno  $U$  se per ogni  $u_0 \in U$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t; 0, u_0) = \bar{u}. \quad \star$$

**Definizione 5.8.** Si dice che una soluzione di equilibrio  $\bar{u}$  è *asintoticamente stabile* se è stabile e se attrae puntualmente un suo intorno.

Si dice che  $\bar{u}$  è *globalmente asintoticamente stabile* se è stabile e se attrae puntualmente  $\mathbb{R}^n$ , l'intero spazio delle fasi.

Si dice che  $\bar{u}$  è *stabile semplicemente* se è stabile ma non lo è asintoticamente. ★

Il più grande insieme  $U$  che è attratto da una posizione asintoticamente stabile  $\bar{u}$  è detto *bacino di attrazione* di  $\bar{u}$ . Quindi una posizione globalmente asintoticamente stabile ha come bacino di attrazione tutto lo spazio delle fasi.

Tra le soluzioni di equilibrio asintoticamente stabili ne esiste una classe speciale in cui la velocità di convergenza è esponenziale, quindi è particolarmente veloce.

**Definizione 5.9.** Si dice che una soluzione di equilibrio  $\bar{\mathbf{u}}$  è *esponenzialmente stabile* esistono un suo intorno  $U$  e due costanti positive  $\alpha, \lambda$  tali che per ogni  $\mathbf{u}_0 \in U$  si abbia

$$|\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0) - \bar{\mathbf{u}}| \leq \alpha e^{-\lambda t} |\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}|.$$

Si dice che  $\bar{\mathbf{u}}$  è *globalmente esponenzialmente stabile* se la proprietà precedente è vera per ogni  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ . ★

**Esempio 5.10.** Nella Definizione 5.8 è importante richiedere che la soluzione sia stabile: ad esempio, la soluzione ( $r = 1, \vartheta = 0$ ) del sistema in coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r) \\ \dot{\vartheta} = r(1 - \cos \vartheta) \end{cases}$$

attrae puntualmente tutto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , ma non è stabile. ★

**Esempio 5.11.** La soluzione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

è globalmente esponenzialmente stabile. ★

**Esempio 5.12.** Tutte le soluzioni di equilibrio dello *smorzatore lineare*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\lambda^2 y \end{cases}$$

sono stabili semplicemente. ★

## 6 Sistemi differenziali lineari

Un *sistema differenziale lineare omogeneo* è un sistema della forma

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = A(t)\mathbf{u}(t) \tag{3}$$

dove  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^n$  e  $A(t)$  è una matrice  $n \times n$  che dipende con regolarità da  $t$ . Nel caso autonomo, la funzione  $A$  è costante e il sistema si dice *a coefficienti costanti*:

$$\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}. \tag{4}$$

I sistemi lineari sono caratterizzati dal fatto che la combinazione lineare di soluzioni è ancora soluzione del sistema. Ci occuperemo d'ora in poi solo del caso autonomo (cioè a coefficienti costanti), di gran lunga più semplice.

Se cerchiamo una soluzione esponenziale della forma

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{p}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

otteniamo l'equazione

$$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p},$$

per cui  $(\lambda, \mathbf{p})$  deve essere una coppia autovalore/autovettore. Quindi, se la matrice  $A$  è diagonalizzabile, essa ammette una base di autovettori ed è possibile trovare la più generale soluzione del sistema come combinazione di esponenziali della forma (5).

Nel caso di matrice più generale, è utile introdurre il concetto di esponenziale di matrice. Denotiamo con  $\mathcal{M}(n)$  l'insieme delle matrici quadrate di ordine  $n$ .

**Definizione 6.1.** L'esponenziale di una matrice quadrata  $A \in \mathcal{M}(n)$  è definito da

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

(dalla disuguaglianza  $|A^k| \leq |A|^k$  è facile vedere che la serie è assolutamente convergente).<sup>(2)</sup> ★

**Proposizione 6.2 (Proprietà dell'esponenziale di matrice).** Per ogni  $A, B \in \mathcal{M}(n)$  valgono i seguenti fatti.

(1) L'esponenziale di  $A$  commuta con  $A$ .

(2) Se  $A, B$  commutano, allora

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

e quindi in particolare anche  $e^A, e^B$  commutano.

(3) La matrice  $e^A$  è sempre invertibile e si ha

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

(4) Se  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  è diagonale, allora

$$e^A = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}).$$

(5) Se  $P \in \mathcal{M}(n)$  è invertibile e  $B = P^{-1}AP$ , allora

$$e^B = P^{-1}e^A P.$$

(6) Se  $A^T = -A$ , cioè se  $A$  è una matrice antisimmetrica, si ha che  $e^A$  è ortogonale.

(7) Vale la formula

$$\det e^A = e^{\text{tr} A}.$$

---

<sup>(2)</sup>Denotiamo con  $|A|$  la norma euclidea o norma di Frobenius di  $A$ , definita da

$$|A|^2 = A \cdot A := \text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j=1}^n S_{ij}^2.$$

Si veda anche la Definizione 18.13 più avanti.

*Dimostrazione.*

(1) È immediato dal fatto che  $A$  commuta con tutte le sue potenze.

(2) Basta usare il prodotto secondo Cauchy delle due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

(3) Poiché  $A$  commuta con  $-A$ , si ha

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A},$$

e dunque  $e^{-A}$  è l'inversa di  $e^A$ .

(4) Si ha facilmente che

$$(\text{diag}(a_1, \dots, a_n))^k = \text{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k),$$

quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\text{diag}(a_1, \dots, a_n))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k)}{k!} = \text{diag} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_n^k}{k!} \right) = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}).$$

(5) Per induzione si vede facilmente che

$$(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP,$$

dunque

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = P^{-1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) P = P^{-1}e^A P.$$

(6) Si verifica facilmente che la trasposta dell'esponenziale è l'esponenziale della trasposta, quindi

$$(e^A)^T = e^{A^T} = e^{-A} = (e^A)^{-1}.$$

(7) Nel caso di matrice triangolare la verifica è immediata. Nel caso generale si usa il punto (5), notando che l'esponenziale di una matrice triangolare è ancora una matrice triangolare.  $\square$

**Teorema 6.3.** *Il problema autonomo ai valori iniziali*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

ha soluzione globale data da

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\mathbf{u}_0.$$

*Dimostrazione.* Usando il fatto che  $tA$ ,  $hA$  commutano, si ha

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - I}{h} e^{tA} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k h^k}{k!} e^{tA} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A^k h^{k-1}}{k!} e^{tA} = A e^{tA},$$

dove abbiamo potuto scambiare il limite con la serie grazie alla convergenza uniforme della serie. Quindi

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{d}{dt} (e^{tA}\mathbf{u}_0) = \left( \frac{d}{dt} e^{tA} \right) \mathbf{u}_0 = A e^{tA} \mathbf{u}_0 = A\mathbf{u}(t). \quad \square$$

Per chiudere la sezione, vediamo il caso di un sistema lineare non omogeneo.

**Teorema 6.4.** Sia  $\dot{\mathbf{u}}(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t)$  un sistema differenziale lineare a coefficienti costanti non omogeneo, con  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  campo vettoriale continuo. Allora la soluzione del sistema con dato iniziale  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  è data da

$$\mathbf{u}(t) = e^{tA}\mathbf{u}_0 + e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} \mathbf{f}(\tau) d\tau.$$

*Dimostrazione.* Si ha subito che  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ . Inoltre

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = Ae^{tA}\mathbf{u}_0 + Ae^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} \mathbf{f}(\tau) d\tau + e^{tA} e^{-tA} \mathbf{f}(t) = A\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t). \quad \square$$

## 7 Esponenziale delle matrici 2x2

**Proposizione 7.1.** Si ha:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \Rightarrow e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Nel primo caso scriviamo  $A = \lambda I + B$ , dove

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice  $B$  è nilpotente e si ha  $B^2 = 0$ , quindi la serie dell'esponenziale di  $B$  contiene solo due termini:

$$e^B = I + B.$$

Inoltre le matrici  $\lambda I$  e  $B$  commutano banalmente, quindi

$$e^A = e^{\lambda I} e^B = e^\lambda (I + B) = e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nel secondo caso, posto  $\lambda := a + ib$ , si dimostra per induzione che

$$A^k = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & -\operatorname{Im}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{bmatrix}$$

e dunque

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & -\operatorname{Im}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(e^\lambda) & -\operatorname{Im}(e^\lambda) \\ \operatorname{Im}(e^\lambda) & \operatorname{Re}(e^\lambda) \end{bmatrix} = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}. \quad \square$$

Vogliamo ora trovare l'esponenziale di  $A$ , una matrice  $2 \times 2$ . Si possono presentare tre casi:

- La matrice  $A$  è diagonalizzabile. In questo caso esiste una matrice invertibile  $P$  tale che

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

e dunque

$$e^A = P \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{bmatrix} P^{-1}.$$

- La matrice  $A$  ha un autovalore doppio non diagonalizzabile. In questo caso, per la forma canonica di Jordan, esiste una matrice invertibile  $P$  tale che

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e dunque, per il lemma precedente,

$$e^A = P e^\lambda \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}.$$

- La matrice  $A$  ha autovalori complessi coniugati  $\lambda = a \pm ib$ . Stavolta esiste una matrice invertibile  $P$  tale che

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

e dunque, sempre per il lemma precedente,

$$e^A = P e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Quindi possiamo scrivere la soluzione per un sistema differenziale autonomo lineare bidimensionale

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

La soluzione si presenta nella forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

dove  $e^{tA}$  è della forma

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{se } A \text{ è diagonalizzabile}$$

$$e^{tA} = P e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{se } A \text{ ha un autovalore doppio non diagonalizzabile}$$

$$e^{tA} = P e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{se } A \text{ ha autovalori complessi coniugati}$$

per opportune matrici invertibili  $P$ .

**Esercizio 7.2.** Si mostri che le matrici esponenziali di

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

sono, rispettivamente,

$$e^A = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{bmatrix}, \quad e^B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^4 + e^2 & e^4 - e^2 \\ e^4 - e^2 & e^4 + e^2 \end{bmatrix}, \quad e^C = \frac{1}{2e^2} \begin{bmatrix} e^6 + 1 & e^6 - 1 \\ e^6 - 1 & e^6 + 1 \end{bmatrix}.$$

*Svolgimento.* La matrice A si riconduce direttamente al secondo caso della Proposizione 7.1 con  $a = -1$  e  $b = 1$ .

La matrice B è simmetrica e dunque diagonalizzabile. Ha autovalori  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = 2$ , per trovare la matrice P basta prendere le componenti di una base di autovettori e metterle in colonna: poiché gli autovettori sono  $(1, 1)$  per  $\lambda_1$  e  $(1, -1)$  per  $\lambda_2$ , si ha

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e dunque

$$e^A = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per la matrice C si procede allo stesso modo: anch'essa è simmetrica e quindi diagonalizzabile, gli autovalori sono  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = 4$  e gli autovettori rispettivamente  $(1, -1)$  e  $(1, 1)$ .  $\diamond$

## 8 Sistemi lineari 2x2

Supponiamo che  $\det A \neq 0$ . Se gli autovalori della matrice A sono reali e distinti, le soluzioni del sistema  $\dot{u} = Au$  sono della forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

In particolare:

- se  $\lambda, \mu < 0$  si parla di *nodo stabile*;
- se  $\lambda, \mu > 0$  si parla di *nodo instabile*;
- se  $\lambda > 0, \mu < 0$  si parla di *sella*.

Nella Figura 5 vediamo una rappresentazione del diagramma di fase in questi casi.

Se invece gli autovalori sono reali e coincidenti, o la matrice è un multiplo dell'identità oppure non è diagonalizzabile. In ogni caso si parla ancora di nodo, stabile o instabile a seconda del segno dell'unico autovalore.

Se infine gli autovalori sono complessi coniugati, la soluzione è della forma

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = P e^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

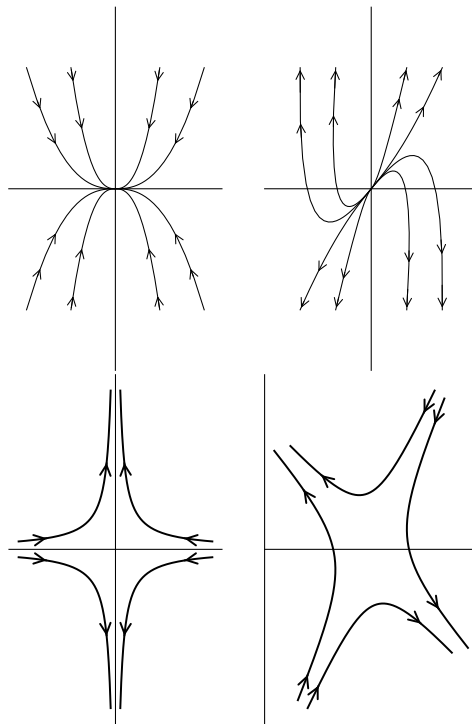


Figura 5: Nodi e selle.

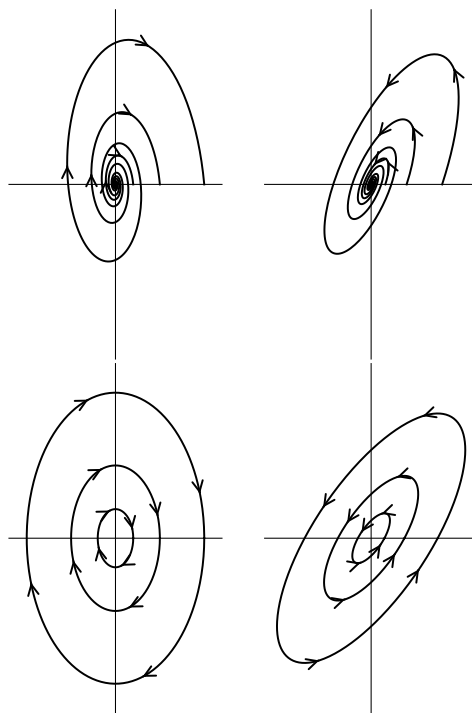


Figura 6: Fuochi e centri.

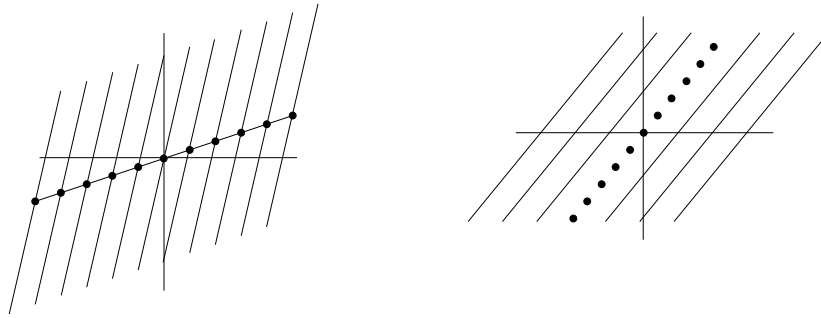


Figura 7: A sinistra il caso in cui un solo autovalore è nullo, a destra quello in cui entrambi sono nulli (ma la matrice non è nulla).

Se  $a \neq 0$  si parla di *fuoco*, stabile se  $a < 0$  e instabile se  $a > 0$ , mentre se  $a = 0$  si parla di *centro*. In Figura 6 vediamo una rappresentazione del diagramma di fase in questi casi.

Se invece  $A$  è singolare, e dunque un autovalore è nullo, allora si ha:

- se l'altro autovalore non è nullo tutte le orbite sono semirette parallele, tranne una retta di punti di equilibrio;
- se l'altro autovalore è pure nullo e la matrice non è diagonalizzabile, allora tutte le orbite sono rette parallele, tranne una retta di punti di equilibrio;
- se la matrice è nulla, allora tutte le orbite sono punti (equilibrio indifferente).

Si dimostra facilmente il seguente teorema, che riassume quanto detto finora. Si veda anche la Figura 8.

**Teorema 8.1 (tau-delta).** Sia  $A$  una matrice  $2 \times 2$ , con traccia  $\tau$  e determinante  $\delta$ . Consideriamo il sistema differenziale  $\dot{u} = Au$ . Allora si ha:

- (1) se  $\delta = 0$ , il sistema è degenere e le orbite sono tutte semirette, rette o punti;
- (2) se  $\delta < 0$  si ha una sella;
- (3) se  $\delta > 0$  e  $\tau^2 \geq 4\delta$  si ha un nodo, stabile se  $\tau < 0$  e instabile se  $\tau > 0$ ;
- (4) se  $\delta > 0$  e  $\tau^2 < 4\delta$  si ha un fuoco, stabile se  $\tau < 0$  e instabile se  $\tau > 0$ ;
- (5) se  $\delta > 0$  e  $\tau = 0$  si ha un centro.

## 9 Stabilità dei sistemi lineari

La stabilità delle posizioni di equilibrio dei sistemi lineari è completamente determinata dagli autovalori della matrice del sistema, come spiegato nel teorema seguente.

**Teorema 9.1.** Sia  $A$  la matrice  $n \times n$  di un sistema differenziale lineare e siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ ,  $k \leq n$ , i suoi autovalori.

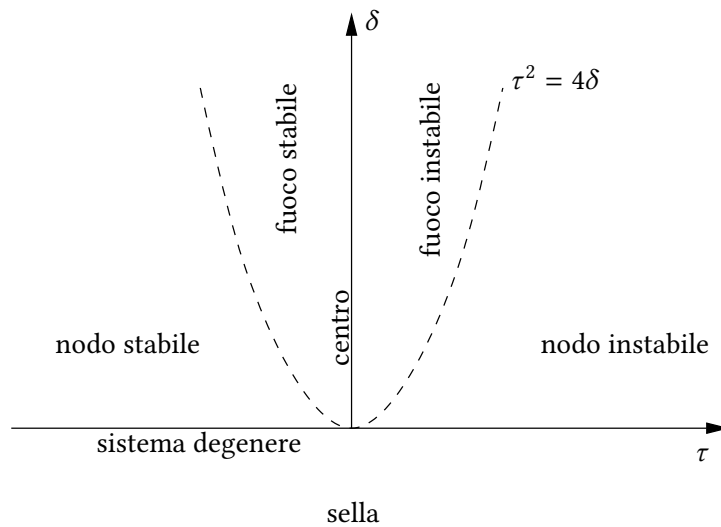


Figura 8: Il piano  $\tau - \delta$ .

- (1) Se  $\text{Re } \lambda_i < 0$  per ogni  $i$ , allora  $\mathbf{0}$  è globalmente esponenzialmente stabile.
- (2) Se  $\text{Re } \lambda_i > 0$  per qualche  $i$ , allora  $\mathbf{0}$  è instabile.
- (3) Se  $\text{Re } \lambda_i \leq 0$  per ogni  $i$  ma non siamo nel primo caso, allora:
  - (a) se per tutti gli autovalori  $\lambda_j$  con  $\text{Re } \lambda_j = 0$  la molteplicità algebrica e geometrica coincidono, allora  $\mathbf{0}$  è stabile semplicemente;
  - (b) se per almeno un autovalore  $\lambda_j$  con  $\text{Re } \lambda_j = 0$  le molteplicità non coincidono, allora  $\mathbf{0}$  è instabile.
- (4) Se ci sono infinite posizioni di equilibrio, esse hanno tutte la stessa stabilità di  $\mathbf{0}$  (in questo caso ci sono autovalori nulli, quindi si ricade necessariamente nel terzo punto).

*Dimostrazione.* Si deve ridurre in forma canonica di Jordan la matrice  $A$ , per poterne calcolare la matrice esponenziale. Consideriamo il caso di un autovalore  $\lambda_i$  reale; allora i suoi blocchi di Jordan sono della forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

e hanno dimensione uno se l'autovalore è diagonalizzabile (cioè se le sue molteplicità algebrica e geometrica coincidono), almeno due se non lo è. Quindi i corrispondenti blocchi della matrice esponenziale contengono termini della forma  $t^k e^{\lambda_i t}$ , dove il termine polinomiale non è presente se il blocco di Jordan ha dimensione 1 (e quindi le due molteplicità coincidono). Se  $\lambda_i < 0$  tali termini sono limitati e vanno a 0 esponenzialmente, mentre se  $\lambda_i > 0$  tali termini divergono. Se  $\lambda_i = 0$ , i termini oscillano periodicamente, e quindi sono stabili semplicemente, se non ci sono termini polinomiali (autovalore diagonalizzabile), mentre divergono se ci sono i termini polinomiali.

Nel caso di autovalori complessi coniugati  $\lambda = \alpha + i\beta$ , si può introdurre il *blocco di Jordan reale*,

$$\begin{bmatrix} D & I_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & D \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la cui dimensione è  $2(1 + m_a - m_g)$ . Il corrispondente blocco della matrice esponenziale contiene termini della forma

$$t^k e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t)$$

con  $k \leq m_a - m_g$ . In questo caso si traggono ancora le stesse conclusioni del caso reale, guardando il segno di  $\alpha$ : se  $m_a = m_g$  abbiamo termini limitati che danno l'origine stabile (esponenzialmente nel caso  $\alpha < 0$ , semplicemente nel caso  $\alpha = 0$ ), mentre se  $m_a > m_g$  abbiamo termini polinomiali che divergono.

Nel caso di più soluzioni di equilibrio, sia  $\bar{u}$  un'altra soluzione di equilibrio e facciamo il cambio di variabili  $v(t) = u(t) - \bar{u}$ . Allora si ha che  $v$  è soluzione se e solo se  $u$  è soluzione, infatti

$$Av(t) = A(u(t) - \bar{u}) = Au(t) = \dot{u}(t) = \dot{v}(t),$$

quindi la soluzione di equilibrio  $\bar{u}$  corrisponde alla soluzione di equilibrio  $\bar{v} = \mathbf{0}$  dello stesso sistema differenziale, e quindi ha la stessa stabilità.  $\square$

**Esempio 9.2.** La posizione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + z \\ \dot{y} = -y \\ \dot{z} = y + z \end{cases}$$

è instabile, in quanto gli autovalori della matrice sono  $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1$ .  $\star$

**Esempio 9.3.** Tutte le posizioni del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y + z \\ \dot{y} = -2y + z \\ \dot{z} = -x - y - 2z \end{cases}$$

sono stabili, in quanto gli autovalori della matrice sono  $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ .  $\star$

**Esempio 9.4.** La posizione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = w \\ \dot{w} = -z \end{cases}$$

è stabile semplicemente, in quanto gli autovalori della matrice sono  $\lambda = \pm i$  con molteplicità 2, ma la matrice ha i blocchi di Jordan reali di dimensione 2.  $\star$

**Esempio 9.5.** La posizione nulla del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = w \\ \dot{w} = -x - 2z \end{cases}$$

è instabile, in quanto gli autovalori della matrice sono  $\lambda = \pm i$  con molteplicità 2, ma la matrice ha un solo blocco di Jordan reale di dimensione 4. ★

**Esercizio 9.6.** Si studino le stabilità delle posizioni di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2py \end{cases}$$

al variare di  $\omega, p$ . Si dimostri che:

- per  $p > 0$  c'è stabilità asintotica esponenziale globale (*oscillatore armonico smorzato*);
- per  $p < 0$  c'è instabilità;
- per  $p = 0$  e  $\omega \neq 0$  c'è stabilità semplice;
- per  $p = 0, \omega = 0$  c'è instabilità.

Per la stabilità nei sistemi lineari quindi è importante sapere se il polinomio caratteristico della matrice del sistema ha tutte le soluzioni con parte reale strettamente negativa. Tali polinomi si dicono *stabili*. Si verifica facilmente la seguente proprietà:

**Proposizione 9.7.** *Se un polinomio è stabile, allora tutti i suoi coefficienti hanno lo stesso segno.*

Si noti che la proposizione precedente fornisce soltanto una condizione necessaria per la stabilità. Un criterio completo per verificare se un polinomio è stabile è il seguente, che non dimostriamo.

**Teorema 9.8 (Criterio di Routh-Hurwitz).** *Un polinomio*

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad a_0 > 0$$

*è stabile se e solo se sono strettamente positivi tutti i minori di nord-ovest della matrice  $n \times n$*

$$H_{ij} = a_{2j-i}, \quad a_k = 0 \text{ per } k < 0 \text{ o } k > n,$$

*detta matrice di Hurwitz.*

Ad esempio, il polinomio  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$  ha la matrice di Hurwitz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

e i minori di nord-ovest valgono  $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = 5, \Delta_3 = 5$ , quindi il polinomio ha tutte radici con parte reale strettamente negativa. Al contrario, il polinomio  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 7$  ha la matrice di Hurwitz

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

e i minori di nord-ovest valgono  $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = -1, \Delta_3 = -7$ , quindi il polinomio non è stabile.

**Osservazione 9.9 (Criterio di Liénard-Chipart).** Esiste una versione un po' più semplice del criterio precedente, in cui basta calcolare solo alcuni minori. Infatti, si può dimostrare che, se  $a_0 > 0$ , il polinomio è stabile se e solo se

- (1)  $a_i > 0$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ ;
- (2)  $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_{n-3} > 0, \dots$ , dove  $\Delta_k$  è il minore di nord-ovest di ordine  $k$  della matrice di Hurwitz.

Quindi ad esempio, posto che tutti i coefficienti siano positivi, basta verificare:

- nel caso  $n = 3$  che  $\Delta_2 > 0$ ;
- nel caso  $n = 4$  che  $\Delta_3 > 0$ ;
- nel caso  $n = 5$  che  $\Delta_4 > 0, \Delta_2 > 0$ ;
- nel caso  $n = 6$  che  $\Delta_5 > 0, \Delta_3 > 0$ .

Si veda [Gantmacher, pag. 199].

★

**Esempio 9.10.** Si confrontino i due sistemi lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = -2x - y + 2z \\ \dot{z} = 2y - 2z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + y + 3z \\ \dot{y} = -2x - y + 2z \\ \dot{z} = 2y - 2z, \end{cases}$$

che differiscono solo per un coefficiente nella prima equazione.

★

Un modo più completo, in cui si hanno informazioni sia sulle parti reali positive che su quelle negative, è quello di costruire la *tabella di Routh*:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} & \cdots \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,0} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

fatta da  $n + 1$  righe, dove nella prima riga mettiamo i coefficienti delle potenze pari decrescenti del polinomio e nella seconda riga quelli delle potenze dispari decrescenti:

$$a_{0,j} := a_{2j}, \quad a_{1,j} := a_{2j+1}.$$

Le righe successive sono ottenute facendo l'operazione

$$[a_{i,0}, a_{i,1}, a_{i,2}, \dots] = [a_{i-2,1}, a_{i-2,2}, a_{i-2,3}, \dots] - \frac{a_{i-2,0}}{a_{i-1,0}} [a_{i-1,1}, a_{i-1,2}, a_{i-1,3}, \dots] \quad i \geq 2$$

che può anche essere scritta come

$$a_{i,j} = \frac{a_{i-1,0} \cdot a_{i-2,j+1} - a_{i-2,0} \cdot a_{i-1,j+1}}{a_{i-1,0}}, \quad i \geq 2.$$

Poi si guarda la prima colonna: ad ogni variazione di segno corrisponde una soluzione con parte reale positiva, ad ogni permanenza una soluzione con parte reale negativa (se compaiono degli zeri nella prima colonna, il metodo va raffinato: ad esempio si può provare a moltiplicare il polinomio per  $(x+k)$  per qualche  $k$  fissato, sperando di eliminare gli zeri).

Riprendendo l'esempio precedente del polinomio  $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1$ , la tabella di Routh è

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$$

ed essendo tutte permanenze, il polinomio è stabile.

Facendo un altro esempio: il polinomio  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$  (che è il quadrato di  $x^2 + x + 1$ ) ha la tabella di Routh

$$\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

e quindi è stabile. In questo caso la matrice di Hurwitz è

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 10 I due metodi di Ljapunov

Ora vediamo due metodi per studiare la stabilità di un sistema autonomo non lineare. Il primo si chiama *metodo di linearizzazione*.

**Teorema 10.1.** Sia  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  un sistema differenziale autonomo con  $\mathbf{F} \in C^1$  e sia  $\bar{\mathbf{u}}$  una sua soluzione di equilibrio. Poniamo

$$\mathbf{A} = D\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}),$$

detta matrice del sistema linearizzato attorno a  $\bar{\mathbf{u}}$ .

Se tutti gli autovalori di  $\mathbf{A}$  hanno parte reale strettamente negativa, allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è esponenzialmente stabile. Se invece esiste un autovalore di  $\mathbf{A}$  con parte reale strettamente positiva, allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è instabile.

*Dimostrazione.* La dimostrazione userà dei fatti di Algebra Lineare che non dimostreremo.

Lo sviluppo di Taylor con resto di Peano di  $F$  attorno a  $\bar{\mathbf{u}}$  si scrive

$$F(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{R}(\mathbf{v}), \quad \lim_{\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{R}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|} = 0.$$

Quindi, ponendo  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \bar{\mathbf{u}}$  si ottiene il sistema differenziale

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = A\mathbf{v}(t) + \mathbf{R}(\mathbf{v}(t)) \quad (6)$$

che ha  $\mathbf{0}$  come posizione di equilibrio. Chiaramente la stabilità di  $\bar{\mathbf{u}}$  nel sistema iniziale corrisponde alla stabilità di  $\mathbf{0}$  in (6).

Supponiamo ora che tutti gli autovalori di  $A$  abbiano parte reale strettamente negativa; allora esiste un prodotto scalare su  $\mathbb{R}^n$  per cui esiste  $c > 0$  tale che

$$\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle \leq -c\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle =: -c\|\mathbf{v}\|^2$$

per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ . Questa proprietà si dimostra facilmente per diagonalizzazione nel caso di  $A$  simmetrica col prodotto scalare canonico, mentre il caso generale è un po' più complicato.<sup>(3)</sup> Sia poi  $U$  un intorno di  $\mathbf{0}$  tale che  $\|\mathbf{R}(\mathbf{v})\| \leq \frac{c}{2}\|\mathbf{v}\|^2$  per ogni  $\mathbf{v} \in U$ .

Ora per ogni  $\mathbf{v}_0 \in U$  studiamo come varia nel tempo la distanza di  $\mathbf{v}(t; 0, \mathbf{v}_0)$ , soluzione di (6), dall'equilibrio  $\mathbf{0}$ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|^2 = \langle \mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{v}}(t) \rangle = \langle \mathbf{v}(t), A\mathbf{v}(t) + \mathbf{R}(\mathbf{v}(t)) \rangle \leq -c\|\mathbf{v}(t)\|^2 + \|\mathbf{R}(\mathbf{v}(t))\|\|\mathbf{v}(t)\|.$$

Fintantoché  $\mathbf{v}(t) \in U$ , si ha  $\|\mathbf{R}(\mathbf{v}(t))\| \leq \frac{c}{2}\|\mathbf{v}(t)\|^2$  e dunque

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{v}(t)\|^2 \leq -\frac{c}{2}\|\mathbf{v}(t)\|^2,$$

da cui segue

$$\|\mathbf{v}(t)\|^2 \leq \|\mathbf{v}_0\|^2 e^{-ct}.$$

Quindi si conclude che  $\mathbf{v}(t)$  non può abbandonare  $U$  e c'è stabilità esponenziale.

Per la seconda parte della dimostrazione, presentiamo quella di [HS, pag. 187]. Supponiamo che esista almeno un autovalore di  $A$  con parte reale strettamente positiva: allora possiamo effettuare un cambio di variabili lineari  $\mathbf{v} = P\mathbf{w}$  per cui  $A$  si presenta in forma diagonale a blocchi

$$\begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{bmatrix}$$

<sup>(3)</sup>Nella forma canonica di Jordan, gli elementi 1 sopra la diagonale possono essere resi piccoli a piacere, a patto di scegliere opportunamente la matrice di passaggio  $P$ . Ad esempio, si può verificare che

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Se ora  $P$  è la matrice di passaggio alla forma canonica di Jordan  $J = P^{-1}AP$ , poniamo  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle := P^{-1}\mathbf{v} \cdot P^{-1}\mathbf{w}$ , da cui

$$\langle \mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle = P^{-1}\mathbf{v} \cdot P^{-1}A\mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot J\mathbf{w} \leq -c\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = -c\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle,$$

dove abbiamo posto  $\mathbf{v} = P\mathbf{w}$ .

con  $n = h + k$ ,  $A^+$  matrice  $h \times h$  con autovalori a parte reale positiva e  $A^-$  matrice  $k \times k$  con autovalori a parte reale nulla o negativa<sup>(4)</sup> (nel caso di matrice simmetrica,  $A^+$  è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori strettamente positivi e  $A^-$  quella con gli autovalori minori o uguali a zero). Inoltre, se  $a > 0$  è più grande del minimo delle parti reali degli autovalori, allora su  $\mathbb{R}^h$  si ha<sup>(5)</sup>

$$\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^h : \quad \langle \mathbf{p}, A^+ \mathbf{p} \rangle_+ \geq a |\mathbf{p}|_+^2$$

e per ogni  $b > 0$  su  $\mathbb{R}^k$  si ha

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbb{R}^k : \quad \langle \mathbf{m}, A^- \mathbf{m} \rangle_- \leq b |\mathbf{m}|_-^2,$$

dove abbiamo denotato con  $|\cdot|_+$  la norma indotta su  $\mathbb{R}^h$  e con  $|\cdot|_-$  la norma indotta su  $\mathbb{R}^k$ . Considereremo  $\mathbb{R}^n$  dotato della norma

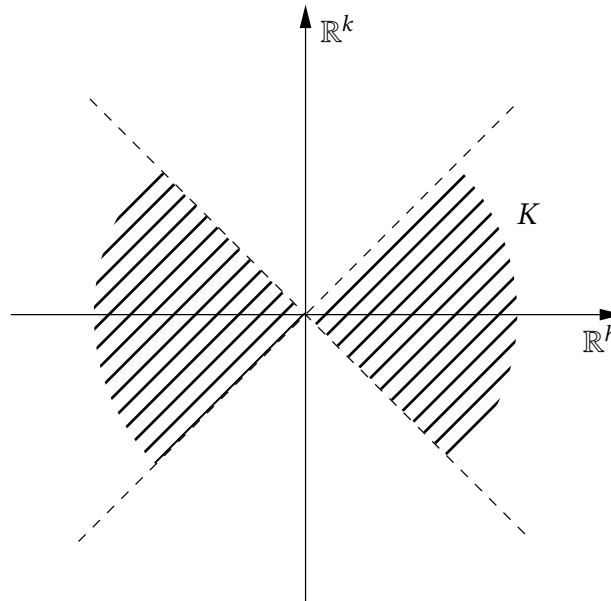
$$|(\mathbf{p}, \mathbf{m})| = \sqrt{|\mathbf{p}|_+^2 + |\mathbf{m}|_-^2}$$

e del prodotto scalare associato.

Sia  $0 < \varepsilon < \frac{a-b}{2\sqrt{2}}$  e consideriamo il sistema (6) e un intorno limitato  $V$  di  $\mathbf{0}$  per cui  $|\mathbf{R}(\mathbf{v})| \leq \varepsilon |\mathbf{v}|$  per ogni  $\mathbf{v} \in V$ . Vogliamo mostrare che troviamo delle condizioni iniziali  $\mathbf{V}_0$  arbitrariamente vicine a  $\mathbf{0}$  tali che l'orbita esca da  $V$ .

Sia  $K$  il cono troncato dato da

$$K = V \cap \{ \mathbf{v} = (\mathbf{p}, \mathbf{m}) : |\mathbf{p}|_+^2 > |\mathbf{m}|_-^2 \}.$$



Notiamo che per ogni  $\mathbf{v} = (\mathbf{p}, \mathbf{m}) \in K$  si ha

$$|\mathbf{R}(\mathbf{v})|^2 \leq \varepsilon^2 |\mathbf{v}|^2 = \varepsilon^2 (|\mathbf{p}|_+^2 + |\mathbf{m}|_-^2) \leq 2\varepsilon^2 |\mathbf{p}|_+^2 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{R}(\mathbf{v})| \leq \sqrt{2}\varepsilon |\mathbf{p}|_+. \quad (7)$$

<sup>(4)</sup>Ad esempio, se  $P$  è la matrice di passaggio alla forma canonica di Jordan  $J = P^{-1}AP$ , possiamo porre  $\mathbf{v} = P\mathbf{w}$ , da cui

$$\dot{\mathbf{v}} = P\dot{\mathbf{w}}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{0}) = AP \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{w}} = P^{-1}AP\mathbf{w} + \mathbf{R}(\mathbf{w}) = J\mathbf{w} + \mathbf{R}(\mathbf{w}).$$

<sup>(5)</sup>Si veda la nota a pag. 30

Consideriamo una condizione iniziale  $\mathbf{v}_0 \in K$ . Poniamo  $\mathbf{v}(t) = (\mathbf{p}(t), \mathbf{m}(t))$ ; fintantoché la soluzione  $\mathbf{v}(t)$  sta in  $K$  si ha, sostituendo nel sistema e moltiplicando per  $(\mathbf{p}, \mathbf{0})$  e per  $(\mathbf{0}, \mathbf{m})$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{p}(t)|_+^2 &\geq a|\mathbf{p}|_+^2 + (\mathbf{p}, \mathbf{0}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{v}) \geq a|\mathbf{p}|_+^2 - |\mathbf{p}|_+ |\mathbf{R}(\mathbf{v})| \geq a|\mathbf{p}|_+^2 - \sqrt{2}\varepsilon |\mathbf{p}|_+^2, \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\mathbf{m}(t)|_-^2 &\leq b|\mathbf{m}|_-^2 + (\mathbf{0}, \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}(\mathbf{v}) \leq b|\mathbf{m}|_-^2 + |\mathbf{m}|_- |\mathbf{R}(\mathbf{v})| \leq b|\mathbf{p}|_+^2 + \sqrt{2}\varepsilon |\mathbf{p}|_+^2. \end{aligned}$$

Dalla prima disuguaglianza segue che  $|\mathbf{p}(t)|_+$  cresce esponenzialmente, e quindi  $\mathbf{v}(t)$  deve uscire da  $K$  in un tempo finito. Ma la funzione

$$g(t) := \frac{1}{2} (|\mathbf{p}(t)|_+^2 - |\mathbf{m}(t)|_-^2)$$

è tale che  $\dot{g}(t) \geq (a - b - 2\sqrt{2}\varepsilon)|\mathbf{p}|_+^2$ , quindi è strettamente crescente; inoltre  $g$  deve annullarsi sulla superficie laterale del cono, per cui  $\mathbf{w}(t)$  non può abbandonare il cono dalla superficie laterale. Ne segue che  $\mathbf{w}(t)$  deve abbandonare  $V$ , quindi la posizione è instabile.  $\square$

**Definizione 10.2.** Una posizione di equilibrio tale che tutti gli autovalori della matrice del sistema linearizzato siano a parte reale non nulla si dice *iperbolica*.  $\star$

Il teorema precedente dice in particolare che le posizioni di equilibrio iperboliche di un sistema non lineare si comportano come quelle di un sistema lineare e o sono esponenzialmente stabili oppure sono instabili. In realtà esiste un importante risultato, il *Teorema di Hartman-Grobman*, che dice che non solo una posizione di equilibrio iperbolica di un sistema non lineare ha la stessa stabilità di quella del sistema linearizzato, ma addirittura i due sistemi, non lineare e linearizzato, sono topologicamente equivalenti<sup>(6)</sup> in un intorno della posizione di equilibrio (si veda [Perko, Section 2.8]). Quindi in particolare nel caso di dimensione due le posizioni di equilibrio iperboliche si comportano localmente come fuochi, nodi o selle.

Visto che nel metodo di linearizzazione bisogna capire il segno della parte reale degli autovalori, anche in questo caso sarà utile il criterio di Routh-Hurwitz 9.8.

Ora vediamo il cosiddetto *metodo diretto di Ljapunov*, che serve soprattutto per i casi in cui ci siano autovalori a parte reale nulla.

**Definizione 10.3.** Sia  $\bar{\mathbf{u}}$  una posizione di equilibrio per il sistema autonomo  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ . Una funzione  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definita su un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  è detta *funzione di Ljapunov relativa a  $\bar{\mathbf{u}}$*  se:

- (1)  $W$  è di classe  $C^1$ ;
- (2)  $W$  ha un minimo assoluto stretto in  $\bar{\mathbf{u}}$ ;
- (3) si ha

$$\forall \mathbf{x} \in U : \dot{W}(\mathbf{x}) := \frac{\partial W}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq 0, \quad \star$$

**Osservazione 10.4.** La definizione può essere leggermente generalizzata richiedendo che

<sup>(6)</sup>In realtà il Teorema di Hartman-Grobman dice una cosa ancora più forte: i due sistemi sono *topologicamente coniugati*, cioè esiste un omeomorfismo per cui le orbite sono percorse con gli stessi tempi: “[...] the homeomorphism  $H$  preserves the parameterization by time”, [Perko, Section 2.8].

(1') la funzione  $W$  sia solo continua

(2) non cambia

(3') per ogni soluzione  $\mathbf{u}(t)$  uscente da un punto di  $U$ , la funzione composta  $\{t \mapsto W(\mathbf{u}(t))\}$  è non crescente in  $t$  per ogni  $t \geq 0$ . ★

L'importanza della funzione di Ljapunov sta nel seguente teorema di stabilità.

**Teorema 10.5.** *Sia  $\bar{\mathbf{u}}$  una posizione di equilibrio per il sistema autonomo  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ . Se esiste una funzione di Ljapunov relativa a  $\bar{\mathbf{u}}$ , allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è stabile.*

*Dimostrazione.* Poiché possiamo sommare una costante arbitraria a  $W$ , possiamo supporre che  $W \geq 0$  e che  $W(\mathbf{x}) = 0$  se e solo se  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{u}}$ .

Sia  $\varepsilon > 0$  tale che

$$\overline{B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \bar{\mathbf{u}}| \leq \varepsilon\} \subseteq U.$$

Poiché  $\bar{\mathbf{u}} \notin \partial B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ , si ha che  $W$  è strettamente positiva su  $\partial B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ , che è un compatto. Quindi, per la continuità di  $W$  e il Teorema di Weierstrass, si ha

$$m_\varepsilon := \min_{\partial B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})} W > 0.$$

Sia ora  $U_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in U : W(\mathbf{x}) < m_\varepsilon\}$ ; si ha che  $U_\varepsilon$  è un intorno di  $\bar{\mathbf{u}}$  contenuto in  $U$ , quindi esiste  $\delta > 0$  tale che  $B_\delta(\bar{\mathbf{u}}) \subseteq U_\varepsilon$ . Dalla terza condizione, per ogni soluzione  $\mathbf{u}(t)$  uscente da  $B_\delta(\bar{\mathbf{u}})$  si ha che la funzione

$$t \mapsto W(\mathbf{u}(t))$$

ha derivata negativa, cioè è non crescente, quindi  $W(\mathbf{u}(t)) < m_\varepsilon$  e  $\mathbf{u}(t)$  non può uscire da  $B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$  (per assurdo: se esiste un istante  $\bar{t}$  tale che  $\mathbf{u}(\bar{t}) \notin B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ , allora per continuità esiste un istante  $t^*$  tale che  $\mathbf{u}(t^*) \in \partial B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ , da cui  $W(\mathbf{u}(t^*)) \geq m_\varepsilon$ , che è una contraddizione). □

**Esempio 10.6.** Consideriamo il sistema del pendolo semplice

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

che ha le posizioni di equilibrio  $(k\pi, 0)$ . La matrice del sistema linearizzato attorno alle posizioni  $((2k+1)\pi, 0)$  è

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha autovalori reali e discordi, quindi le posizioni sono instabili (selle).

Se linearizziamo attorno a  $(2k\pi, 0)$  invece otteniamo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha solo autovalori con parte reale nulla, quindi il metodo di linearizzazione fallisce.

Consideriamo allora  $(0, 0)$  e il suo intorno  $U = (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$ ; la funzione

$$W(x, y) := -\omega^2 \cos x + \frac{y^2}{2}$$

è funzione di Ljapunov, infatti:

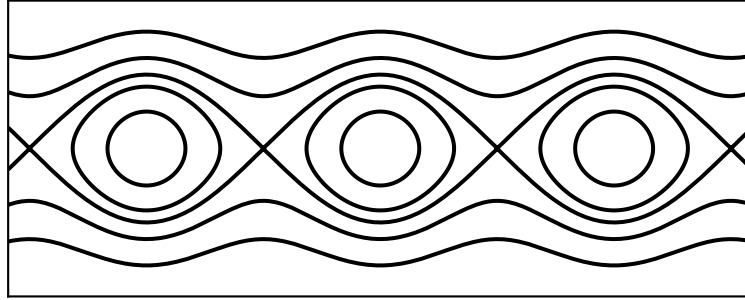


Figura 9: Le curve di livello della funzione  $W(x, y) := 1 - \cos x + \frac{y^2}{2}$ .

(1)  $W$  è  $C^1$ ;

(2) si verifica che  $W$  ha un minimo stretto in  $(0, 0)$ ;

(3)  $\dot{W}(x, y) = \frac{\partial W}{\partial x} \cdot (y, -\omega^2 \sin x) = (\omega^2 \sin x, y) \cdot (y, -\omega^2 \sin x) = 0$ . ★

Quindi  $(0, 0)$  è stabile, analogamente a tutte le posizioni del tipo  $(2k\pi, 0)$ .

Inoltre, avendo trovato una funzione *costante* sulle traiettorie, ed essendo in dimensione due, possiamo anche disegnare il ritratto di fase per questo sistema: basta rappresentare le curve di livello della funzione  $W$ .

Ora vediamo un metodo per verificare la stabilità asintotica. Premettiamo un lemma.

**Lemma 10.7.** Consideriamo un sistema autonomo  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  e sia  $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che

$$t \mapsto W(\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0))$$

sia strettamente decrescente per ogni  $\mathbf{u}_0$  non di equilibrio.

Allora i punti limite delle traiettorie  $\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0)$ , ovvero i punti  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  tali che esiste una successione  $t_h \rightarrow +\infty$  con

$$\lim_h \mathbf{u}(t_h; 0, \mathbf{u}_0) = \mathbf{y},$$

sono di equilibrio per il sistema.

*Dimostrazione.* Dalla stretta decrescenza di  $W$  si ha

$$\forall t > 0 : W(\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0)) > W(\mathbf{y}). \quad (8)$$

Per assurdo sia  $\mathbf{y}$  non di equilibrio e consideriamo il prolungamento della soluzione  $\mathbf{u}(s; 0, \mathbf{y})$ .

Per  $s > 0$  fissato, dalla dipendenza continua dai dati iniziali e dalla continuità di  $W$  segue che la funzione

$$x \mapsto W(\mathbf{u}(s; 0, x)) - W(\mathbf{y})$$

è continua; inoltre essendo  $W$  strettamente decrescente sulle traiettorie non di equilibrio, si ha  $W(\mathbf{u}(s; 0, \mathbf{y})) - W(\mathbf{y}) < 0$  per ogni  $s > 0$ . Quindi dal Teorema della permanenza del segno si ha che esiste un intorno  $V$  di  $\mathbf{y}$  tale che

$$\forall x \in V : W(\mathbf{u}(s; 0, x)) - W(\mathbf{y}) < 0.$$

Ma per  $h$  abbastanza grande si deve avere  $\mathbf{u}(t_h; 0, \mathbf{u}_0) \in V$ , quindi

$$W(\mathbf{u}(t_h + s; 0, \mathbf{u}_0)) = W(\mathbf{u}(s; 0, \mathbf{u}(t_h; 0, \mathbf{u}_0))) < W(\mathbf{y}),$$

che è in contraddizione con la (8). □

**Teorema 10.8 (Teorema di Ljapunov sulla stabilità asintotica).** *Sia  $\bar{\mathbf{u}}$  una posizione di equilibrio per il sistema autonomo  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ . Supponiamo che esista una funzione di Ljapunov relativa a  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che  $\mathbf{u}(t) \equiv \bar{\mathbf{u}}$  sia l'unica orbita contenuta nell'insieme*

$$\{\mathbf{x} \in U : \dot{W}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è asintoticamente stabile.

**Osservazione 10.9.** Si noti che la condizione del teorema può essere rimpiazzata da una condizione lievemente più generale:

supponiamo che esista una funzione di Ljapunov (continua) relativa a  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che la funzione

$$t \mapsto W(\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0))$$

sia strettamente decrescente per ogni  $\mathbf{u}_0 \in U$ ,  $\mathbf{u}_0 \neq \bar{\mathbf{u}}$ . ★

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente la posizione  $\bar{\mathbf{u}}$  è sicuramente stabile, poiché ammette una funzione di Ljapunov. Quindi per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che per ogni  $\mathbf{u}_0 \in B_\delta(\bar{\mathbf{u}}) \subseteq U$  si abbia

$$\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0) \in B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$$

per ogni  $t \geq 0$ .

Sia  $\mathbf{u}_0 \neq \bar{\mathbf{u}}$ ; poiché l'orbita  $\{\mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0) : t \geq 0\}$  sta in un limitato, allora ha chiusura compatta, quindi esiste una successione divergente  $(t_h)$  tale che

$$\mathbf{u}(t_h; 0, \mathbf{u}_0) \rightarrow \mathbf{y} \in \overline{B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})}.$$

Poiché  $\mathbf{y}$  è un punto limite di una traiettoria ed esiste una funzione continua strettamente decrescente sulle traiettorie, dal Lemma 10.7 troviamo che  $\mathbf{y}$  è soluzione di equilibrio. Visto che l'unica soluzione di equilibrio in  $U$  è  $\bar{\mathbf{u}}$ , risulta che tutti i punti limite delle traiettorie coincidono con  $\bar{\mathbf{u}}$ , che quindi è asintoticamente stabile. □

**Osservazione 10.10.** La costruzione di una funzione di Ljapunov per una posizione asintoticamente stabile è utile per determinarne il bacino di attrazione: la componente connessa dell'intorno  $U$  su cui è definita la funzione, che contiene la posizione di equilibrio, è contenuta nel bacino di attrazione dell'equilibrio.

Se invece abbiamo una funzione di Ljapunov per una soluzione stabile (semplicemente) che rimane costante sulle traiettorie, ovvero tale che

$$\forall \mathbf{x} \in U : \dot{W}(\mathbf{x}) = 0$$
★

allora le orbite delle soluzioni staranno sulle superfici di livello della  $W$ ; come abbiamo visto nell'Esempio 10.6, in dimensione due le curve di livello danno proprio le orbite del sistema.

Ora vediamo un metodo per dedurre l'instabilità di una soluzione di equilibrio.

**Teorema 10.11 (Teorema di Četaev).** *Sia  $\bar{\mathbf{u}}$  una posizione di equilibrio per il sistema autonomo  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  e sia  $U$  un suo intorno aperto. Supponiamo che esista un aperto  $A \subseteq U$  tale che  $\bar{\mathbf{u}} \in \bar{A}$  e una funzione  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che*

- $W(\mathbf{x}) > 0$  e  $\dot{W}(\mathbf{x}) > 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in A$ ;
- $W(\mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in U \cap \partial A$ .<sup>(7)</sup>

Allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è instabile.

*Dimostrazione.* Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $\overline{B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})} \subseteq U$  e sia  $\mathbf{u}(t)$  l'orbita uscente da  $\mathbf{u}_0 \in A \cap B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ ; ovviamente si ha  $W(\mathbf{u}_0) > 0$ . Consideriamo l'insieme

$$K = \bar{A} \cap \overline{B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})} \cap \{\mathbf{u} : W(\mathbf{u}) \geq W(\mathbf{u}_0)\};$$

esso è un compatto contenuto in  $U$ , e inoltre si ha  $K \subseteq A$ : infatti, se esistesse  $\mathbf{u} \in K \cap \partial A$ , allora si avrebbe  $W(\mathbf{u}) > 0$ , mentre per ipotesi  $W = 0$  su  $U \cap \partial A$ . Ma allora la funzione  $\dot{W}$  ammette minimo  $m$  su  $K$  e tale minimo è strettamente positivo. Si ha  $\mathbf{u}_0 \in K$ : fintantoché  $\mathbf{u}(t) \in K$ , allora si ha la disequazione differenziale

$$\frac{d}{dt}W(\mathbf{u}(t)) \geq m$$

e integrando da 0 a  $t$  si ottiene

$$W(\mathbf{u}(t)) \geq mt + W(\mathbf{u}_0) \quad \text{per } t \geq 0.$$

Ma poiché  $W$  è limitata su  $K$ , ne segue che  $\mathbf{u}(t)$  deve uscire da  $K$ ; essendo  $W$  crescente sulle orbite, la condizione  $W(\mathbf{u}(t)) \geq W(\mathbf{u}_0)$  non è violata; inoltre  $\mathbf{u}(t)$  non può uscire da  $\bar{A}$  perché dovrebbe attraversarne la frontiera, ma  $W = 0$  su  $\partial A$  mentre la  $W$  deve crescere lungo l'orbita. Quindi deve accadere che  $\mathbf{u}(t)$  abbandoni l'intorno  $B_\varepsilon(\bar{\mathbf{u}})$ .<sup>(8)</sup>  $\square$

Esiste anche un metodo per capire se la soluzione instabile è di tipo *sorgente*, cioè se, localmente, tutte le traiettorie si allontanano dall'equilibrio. Premettiamo un lemma.

**Lemma 10.12.** *Sia  $\bar{\mathbf{u}}$  una posizione di equilibrio per il sistema autonomo  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$ . Supponiamo che esista  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}_0 \neq \bar{\mathbf{u}}$ , tale che*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{u}(t; 0, \mathbf{u}_0) = \bar{\mathbf{u}}.$$

Allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è instabile.

*Dimostrazione.* Sia  $r := |\mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{u}}|$  e sia  $V = B_{r/2}(\bar{\mathbf{u}})$ . Allora per ogni  $h \in \mathbb{N}$  esiste  $t_h > 0$  tale che  $\mathbf{u}(-t_h) \in B_{1/h}(\bar{\mathbf{u}})$  e

$$\mathbf{u}(t_h; 0, \mathbf{u}(-t_h)) = \mathbf{u}_0 \notin V. \quad \square$$

<sup>(7)</sup>In particolare, poiché  $\dot{W}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$ , deve essere che  $\bar{\mathbf{u}} \in \partial A$ .

<sup>(8)</sup>Ho appreso questa dimostrazione dal sito del corso MMA420 di Hjalmar Rosengren, che ringrazio.

**Teorema 10.13.** Sia  $\bar{u}$  una posizione di equilibrio per il sistema autonomo  $\dot{u} = F(u)$ . Supponiamo che esista un intorno  $U$  di  $\bar{u}$  e una funzione continua  $W : U \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $W(\bar{u}) = 0$ ,  $W(u) > 0$  per  $u \neq \bar{u}$  e  $\dot{W} \geq 0$ . Supponiamo poi che  $u(t) \equiv \bar{u}$  sia l'unica orbita contenuta nell'insieme

$$\{x \in U : \dot{W}(x) = 0\}.$$

Allora  $\bar{u}$  è instabile (sorgente).

*Dimostrazione.* Consideriamo il sistema differenziale  $\dot{v} = -F(v)$ , le cui soluzioni sono le stesse del problema di partenza ma con  $t$  cambiato di segno. Allora siamo nelle condizioni del Teorema di Ljapunov sulla stabilità asintotica, quindi  $\bar{u}$  è asintoticamente stabile per  $\dot{v} = -F(v)$ . Questo significa che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t; 0, u_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t; 0, u_0) = \bar{u}$$

per ogni  $u_0 \in U$ , e dunque dal Lemma precedente  $\bar{u}$  è instabile per  $\dot{u} = F(u)$ .  $\square$

**Esempio 10.14.** Studiamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + \alpha y|y| \end{cases}$$

al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\omega \neq 0$  (per  $\alpha < 0$  tale sistema rappresenta un oscillatore armonico soggetto a un attrito quadratico).

L'unica posizione di equilibrio è  $(0, 0)$  e la matrice di linearizzazione ha autovalori  $\pm i\omega$ ; nel caso  $\alpha = 0$  il sistema è lineare e dunque la posizione è stabile (centro); nel caso  $\alpha \neq 0$  invece non possiamo usare il Teorema di linearizzazione. Cerchiamo allora una funzione di Ljapunov: moltiplicando la prima equazione per  $\omega^2 x$  e la seconda per  $y$  e integrando troviamo che la funzione

$$W(x, y) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

definita su tutto  $\mathbb{R}^2$  ha un minimo (globale) stretto nella posizione di equilibrio; inoltre

$$\dot{W}(x, y) = \text{grad } W \cdot F = \alpha y^2 |y|,$$

che per  $y \neq 0$  ha il segno di  $\alpha$ . Per  $\alpha \neq 0$ , poiché

$$\dot{W} = 0 \quad \Rightarrow \quad y \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad (\dot{x}, \dot{y}) \equiv (0, 0),$$

si ha che l'unica orbita che annulla  $\dot{W}$  è l'equilibrio, e quindi se  $\alpha < 0$  la posizione di equilibrio è asintoticamente stabile per il Teorema 10.8.

Se  $\alpha > 0$ , la stessa funzione  $W$  soddisfa le ipotesi del Teorema 10.13, quindi otteniamo che l'equilibrio è instabile (sorgente).

Poiché nella matrice di linearizzazione il coefficiente  $\alpha$  non compare neppure, questo esempio mostra che il metodo di linearizzazione non può essere esaustivo.  $\star$

**Esempio 10.15.** Studiamo la posizione di equilibrio  $(0, 0)$  del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ \dot{y} = -xy. \end{cases}$$

Il metodo di linearizzazione fallisce, mostriamo che l'origine è una posizione di equilibrio instabile mediante il Teorema di Cetaev. Data la funzione  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $W(x, y) = xy$  e dato l'aperto  $A = \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$  (cioè il III quadrante), si ha che

- $W$  è regolare,
- $W > 0$  su  $A$  e  $W = 0$  su  $\partial A$ ,
- $\dot{W} = -x^2y - x^2y = -2x^2y > 0$  su  $A$ ,

quindi  $(0, 0)$  è instabile per il Teorema di Cetaev.

Allo stesso modo si può mostrare che ogni punto di equilibrio  $(0, \bar{y})$  è instabile: se  $\bar{y} < 0$  si usa la stessa funzione  $W$  appena vista, mentre se  $\bar{y} > 0$  si può usare la funzione  $W(x, y) = -xy$  e come aperto  $A$  il II quadrante.

Se invece il sistema fosse

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -xy \end{cases}$$

allora in questo caso ancora tutte le posizioni di equilibrio dovrebbero essere instabili, ma non riesco a trovare una funzione di Cetaev! ★

**Esempio 10.16.** Studiamo le posizioni di equilibrio del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$$

I punti degli assi cartesiani  $(\bar{x}, 0)$  e  $(0, \bar{y})$  sono tutte e sole le posizioni di equilibrio. Linearizzando si ha

$$A(x, y) = \begin{bmatrix} -y & -x \\ y & x \end{bmatrix} \Rightarrow A(\bar{x}, 0) = \begin{bmatrix} 0 & -\bar{x} \\ 0 & \bar{x} \end{bmatrix}, \quad A(0, \bar{y}) = \begin{bmatrix} -\bar{y} & 0 \\ \bar{y} & 0 \end{bmatrix}$$

quindi per  $\bar{x} > 0$  e  $\bar{y} < 0$  le rispettive posizioni di equilibrio sono instabili.

Consideriamo ora una posizione di equilibrio  $(0, \bar{y})$  con  $\bar{y} > 0$  e prendiamo la funzione<sup>(9)</sup>

$$W(x, y) = (x + y - \bar{y})^2 + x^2y^2.$$

Tale funzione ha un minimo locale stretto nel punto di equilibrio e

$$\dot{W} = [2(x + y - \bar{y}) + 2xy^2](-xy) + [2(x + y - \bar{y}) + 2x^2y](xy) = 4x^2y^2(x - y),$$

che in un intorno di  $(0, \bar{y})$  è negativa (ricordando che  $\bar{y} > 0$ ). Quindi  $W$  è una funzione di Ljapunov e la posizione  $(0, \bar{y})$  è stabile. Tale stabilità non può essere asintotica perché queste posizioni di equilibrio non sono isolate.

Si dimostra che la stessa funzione

$$W(x, y) = (x + y - \bar{x})^2 + x^2y^2$$

<sup>(9)</sup>Abbiamo trovato questa funzione così: col cambio di variabili  $x = \xi + \eta$ ,  $y = \xi - \eta$  si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 0 \\ \dot{\eta} = \eta^2 - \xi^2 = f(\xi, \eta) \end{cases}$$

in cui la prima equazione è banale. Data una posizione di equilibrio  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ , se c'è stabilità (linearizzata) per  $\dot{\eta} = f(\xi, \eta)$ , cioè se  $\frac{\partial f}{\partial \eta}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) < 0$  nella posizione di equilibrio, allora è facile vedere che la funzione  $W = (\xi - \bar{\xi})^2 + f(\xi, \eta)^2$  è di Ljapunov per la posizione di equilibrio.

è di Ljapunov per le posizioni  $(\bar{x}, 0)$  nel caso  $\bar{x} < 0$ , quindi anche tali posizioni sono stabili semplicemente.

Resta da classificare soltanto la posizione nulla: col successivo metodo delle isocline si vede che tale posizione è instabile. Più in generale, una posizione di equilibrio che sia punto di accumulazione di posizioni di equilibrio instabili, dovrebbe essere instabile (ma bisognerebbe dimostrarlo). ★

## 11 Metodo delle isocline

In questa breve sezione vediamo un metodo grafico per ricavare qualitativamente la forma delle orbite di un sistema differenziale bidimensionale. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

allora si ha che la pendenza  $\vartheta$  di un'orbita rispetto all'orizzontale è data da

$$\tan \vartheta = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Fissato  $\vartheta$ , la curva precedente viene detta *isoclina di angolo*  $\vartheta$ . Disegnare alcune isocline può aiutare a capire la forma di alcune orbite, senza dover risolvere il sistema. Due isocline particolari molto importanti sono

$g(x, y) = 0$  : l'insieme dei punti in cui le orbite hanno tangente orizzontale

$f(x, y) = 0$  : l'insieme dei punti in cui le orbite hanno tangente verticale.

Inoltre, il segno di  $f$  e il segno di  $g$  ci dicono quale sia il segno di  $\dot{x}$  e di  $\dot{y}$ , e quindi come sono orientati i vettori tangenti e dunque le orbite. Ad esempio, se  $f(x, y) = g(x, y) > 0$  si ha che la tangente è parallela alla bisettrice del I-III quadrante e orientata verso NE; invece, se  $f(x, y) = g(x, y) < 0$  si ha sempre che la tangente è parallela alla bisettrice del I-III quadrante, ma stavolta è orientata verso SW.

## 12 Sistemi hamiltoniani e sistemi gradiente

Vediamo in questa sezione alcuni particolari tipi di sistemi dinamici, che compaiono spesso nelle applicazioni fisiche.

**Definizione 12.1 (Sistema hamiltoniano).** Un sistema dinamico in  $\mathbb{R}^{2n}$  si dice *hamiltoniano* se esiste una funzione  $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$  tale che, denotando con  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , il generico elemento di  $\mathbb{R}^{2n}$ ,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \\ \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n.$$

La funzione  $H$  si dice *hamiltoniana* del sistema. ★

Se si ha un sistema del tipo

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \dot{y}_i = G_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{cases} \quad i = 1, \dots, n,$$

si verifica che il sistema è hamiltoniano se e solo se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial G_j}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

È facile vedere che i punti di equilibrio di un sistema hamiltoniano sono tutti e soli i punti critici di  $H$ . Inoltre vale la seguente:

**Proposizione 12.2.** *In un sistema hamiltoniano la funzione  $H$  è costante sulle traiettorie..*

*Dimostrazione.* Si ha

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = 0. \quad \square$$

In particolare, le orbite stanno sulle superfici di livello  $\{H = \text{cost}\}$ .

Sia ora  $n = 1$ ; in questo caso le orbite del sistema sono proprio (pezzi di) curve di livello di  $H$ . Inoltre:

- se  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un minimo stretto per  $H$ , allora  $H$  è una funzione di Ljapunov e  $(\bar{x}, \bar{y})$  è stabile (centro);
- se  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un massimo stretto per  $H$ , allora  $-H$  è una funzione di Ljapunov e di nuovo  $(\bar{x}, \bar{y})$  è stabile (centro);
- se linearizzando attorno a  $(\bar{x}, \bar{y})$  si ha

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} < 0,$$

allora il punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  è instabile (sella).

Un caso particolare di sistema hamiltoniano è il *sistema newtoniano* (per  $n = 1$ ):

$$\ddot{x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x). \end{cases}$$

L'hamiltoniana è data da  $H(x, y) = y^2/2 - F(x)$ , dove  $F$  è una primitiva di  $f$ . Quindi:

- gli equilibri sono del tipo  $(\bar{x}, 0)$  con  $f(\bar{x}) = 0$ ;
- se  $\bar{x}$  è un massimo stretto per  $F$ , allora  $(\bar{x}, 0)$  è una sella;
- se  $\bar{x}$  è un minimo stretto per  $F$ , allora  $(\bar{x}, 0)$  è un centro;
- il ritratto di fase è simmetrico rispetto all'asse  $y$ .

**Definizione 12.3 (Sistema gradiente).** Un sistema dinamico  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  è di tipo *gradiente* se

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

per qualche funzione  $V$ . ★

Per tali sistemi si ha che i punti di equilibrio  $\bar{u}$  sono i punti critici di  $V$ . Inoltre:

- se  $\bar{u}$  è un minimo stretto per  $V$ , allora  $\bar{u}$  è asintoticamente stabile:  $V$  è una funzione di Ljapunov;
- se  $\bar{u}$  è un massimo stretto per  $V$ , allora  $\bar{u}$  è instabile (sorgente):  $V$  è una antifunzione di Ljapunov nel senso del Teorema 10.13;
- se  $\nabla V(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$ , allora l'orbita per  $\mathbf{u}$  è ortogonale alla superficie di livello di  $V$  passante per  $\mathbf{u}$ .

La matrice di linearizzazione  $A(\bar{\mathbf{u}}) = \left[ -\frac{\partial^2 V}{\partial u_i \partial u_j} \right]$  è simmetrica, quindi gli autovalori sono tutti reali. In particolare, nel caso  $n = 2$  non esistono fuochi.

Infine, nel caso bidimensionale i sistemi hamiltoniani e gradiente sono legati tra loro tramite la relazione di ortogonalità:

**Definizione 12.4.** In  $\mathbb{R}^2$ , i due sistemi

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x, y) \\ \dot{y} = -f(x, y) \end{cases}$$

si dicono *ortogonali*. ★

Si verifica subito che due sistemi ortogonali hanno gli stessi equilibri e orbite ortogonali. Inoltre i centri di uno vanno in nodi dell'altro, le selle vanno in selle e i fuochi vanno in fuochi.

**Esercizio 12.5.** Si studino i sistemi hamiltoniani con

- $H(x, y) = x^2 + 2y^2$
- $H(x, y) = x^2 - y^2$
- $H(x, y) = y \sin x$
- $H(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 5$

e i loro ortogonali.

## 13 Stabilità nel caso unidimensionale e biforcazione dell'equilibrio

Nel caso unidimensionale  $\dot{x} = f(x)$  esiste un modo semplice per classificare la stabilità di una posizione di equilibrio  $\bar{x}$ . Si ha  $f(\bar{x}) = 0$ : se in un intorno di  $\bar{x}$  abbiamo  $f(x) > 0$  per  $x < \bar{x}$  e  $f(x) < 0$  per  $x > \bar{x}$ , allora la posizione è asintoticamente stabile. Infatti, si ha che  $\dot{x}$  è positiva a sinistra di  $\bar{x}$ , e quindi le orbite vanno verso l'equilibrio, e la stessa cosa a destra.<sup>(10)</sup> Quindi se per  $x \neq \bar{x}$  abbiamo

$$(x - \bar{x})f(x) < 0,$$

<sup>(10)</sup>Più rigorosamente, in questo caso si può dimostrare che  $W(x) = [f(x)]^2$  è una funzione di Ljapunov relativa a  $\bar{x}$ . Inoltre, se  $f'$  non si annulla in un intorno di  $\bar{x}$ , tranne eventualmente in  $\bar{x}$ , allora anche  $\dot{W}$  si annulla solo nella posizione di equilibrio e quindi la posizione è asintoticamente stabile.

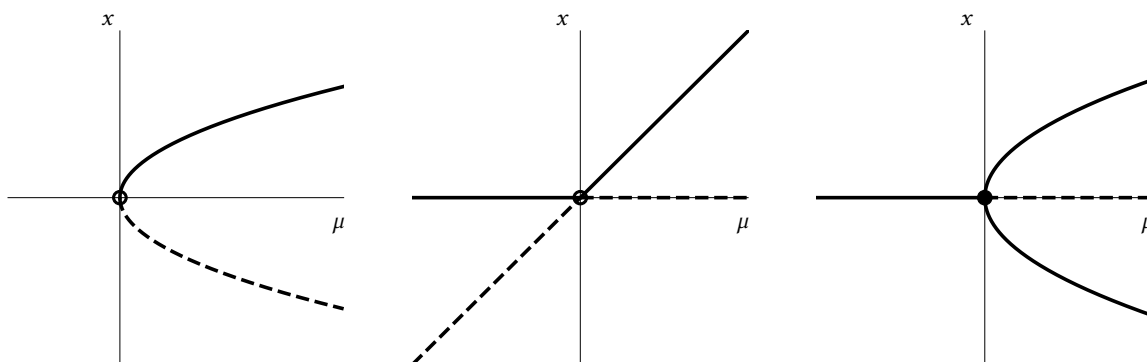


Figura 10: I tre tipi di biforcazione nel caso unidimensionale.

allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile. Se invece la condizione è violata con un maggiore stretto, allora la posizione è instabile.

Consideriamo ora un sistema differenziale dipendente da un parametro reale  $\mu$ :

$$\dot{u} = F(u, \mu).$$

Si dice che  $\bar{\mu}$  è un valore di biforcazione se c'è un cambiamento qualitativo nelle posizioni di equilibrio tra  $\mu < \bar{\mu}$  e  $\mu > \bar{\mu}$ .

Vediamo degli esempi nel caso unidimensionale.

- $\dot{x} = \mu - x^2$ . Ha le posizioni di equilibrio  $\bar{x}_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$ , che esistono solo per  $\mu \geq 0$ . Si verifica che quella positiva è stabile mentre quella negativa è instabile; nel caso  $\mu = 0$  l'origine è instabile. Nel diventare  $\mu$  positivo, “nascono” due posizioni di equilibrio dove prima non ce n'erano. Quindi  $\mu = 0$  è un valore di biforcazione, detto *biforcazione a sella*.
- $\dot{x} = \mu x - x^2$ . Ha le posizioni di equilibrio  $\bar{x}_1 = 0$  e  $\bar{x}_2 = \mu$ . La prima è stabile per  $\mu < 0$  e instabile per  $\mu > 0$ , viceversa per la seconda; per  $\mu = 0$  l'origine è instabile. C'è uno “scambio di stabilità” tra le due posizioni di equilibrio. Quindi  $\mu = 0$  è un valore di biforcazione, detto *biforcazione transcriticala*.
- $\dot{x} = \mu x - x^3$ . Ha sempre la posizione di equilibrio  $\bar{x}_1 = 0$ ; se poi  $\mu > 0$  ha anche  $\bar{x}_{2,3} = \pm\sqrt{\mu}$ . La prima è stabile per  $\mu < 0$  e instabile per  $\mu > 0$ , le altre due sono stabili quando esistono; per  $\mu = 0$  l'origine è stabile. C'è una “perdita di stabilità” della posizione nulla e “nascono” due nuove posizioni di equilibrio. Quindi  $\mu = 0$  è un valore di biforcazione, detto *biforcazione a forca (pitchfork)*.

Se cambiamo segno al secondo membro, cioè  $\dot{x} = x^3 - \mu x$ , otteniamo una situazione simile con le stabilità scambiate: si parla sempre di biforcazione a forca.

In generale, nel caso unidimensionale  $\dot{x} = f(x, \mu)$ , se

$$f(\bar{x}, \bar{\mu}) = f'(\bar{x}, \bar{\mu}) = \dots = f^{(m-1)}(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0, \quad f^{(m)}(\bar{x}, \bar{\mu}) \neq 0,$$

allora l'equazione ha un punto critico di molteplicità  $m$  in  $\bar{x}$ , quindi ci possono essere al più  $m$  punti critici che si biforcano da esso. Nei tre esempi precedenti si ha rispettivamente  $m = 2$ ,  $m = 2$  e  $m = 3$ .

Ora vediamo un esempio importante di biforcazione nel caso bidimensionale. Enunciamo un teorema ma non lo dimostriamo.

**Teorema 13.1 (Biforcazione di Hopf).** Consideriamo il generico sistema bidimensionale

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \mu) \\ \dot{y} = g(x, y, \mu) \end{cases}$$

dove  $\mu$  è un parametro reale. Supponiamo che esista un punto di equilibrio  $(\bar{x}, \bar{y})$ , eventualmente dipendente da  $\mu$ , tale che gli autovalori della matrice linearizzata attorno ad esso siano

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\beta(\mu)$$

e supponiamo che esista  $\bar{\mu}$  tale che:

$$(1) \alpha(\bar{\mu}) = 0, \quad \beta(\bar{\mu}) \neq 0, \quad \frac{d\alpha}{d\mu}(\bar{\mu}) > 0;$$

$$(2) a := (f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyx}) + (f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}) / \beta(\bar{\mu}) \neq 0,$$

dove gli indici denotano le derivate rispetto a quella variabile e tutto è calcolato in  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\mu})$ , e per  $\beta(\bar{\mu})$  scegliamo il segno di  $\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\mu})$ .

Allora il punto di equilibrio è stabile per  $\mu < \bar{\mu}$  e instabile per  $\mu > \bar{\mu}$ ; se  $a < 0$  c'è un'orbita periodica stabile per  $\mu > \bar{\mu}$  (caso supercritico), mentre se  $a > 0$  c'è un'orbita periodica instabile per  $\mu < \bar{\mu}$  (caso sottocritico).

**Esempio 13.2.** L'esempio più semplice è dato dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$$

che in coordinate polari si scrive

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\vartheta} = 1. \end{cases} \quad \star$$

**Esercizio 13.3.** Si dica se è applicabile il Teorema di Hopf al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + y - xy^2 \\ \dot{y} = -x + \mu y - y^3. \end{cases}$$

**Esercizio 13.4.** Si dica se è applicabile il Teorema di Hopf al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y \end{cases}$$

**Esercizio 13.5.** Si dica se esiste una biforcazione di Hopf per l'equazione di Van der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0.$$

## 14 Insiemi invarianti e attrattori

Sia  $S_t$  un semigruppoo continuo.

**Definizione 14.1.** Sia  $X \in \mathbb{R}^n$ . Poniamo

$$S_t X := \{S_t \mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}.$$

Diremo che  $X$  è *positivamente invariante* se  $S_t X \subseteq X$  per ogni  $t \geq 0$ .

Diremo che  $X$  è *negativamente invariante* se  $S_t X \supseteq X$  per ogni  $t \geq 0$ .

Diremo che  $X$  è *invariante* se  $S_t X = X$  per ogni  $t \geq 0$ . ★

**Esempio 14.2.** Data l'equazione  $\dot{x} = x$ , si ha

$$S_t [0, 1] = [0, e^t].$$

In particolare,  $[0, 1]$  è negativamente invariante. ★

**Teorema 14.3.** Se il semigruppoo è invertibile, allora ogni orbita completa è invariante.

*Dimostrazione.* Ricordiamo che l'orbita passante per  $\mathbf{x}$  è data da

$$\gamma(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \exists t \in \mathbb{R}, \mathbf{y} = S_t \mathbf{x}\}.$$

Quindi, se  $\mathbf{y} \in \gamma(\mathbf{x})$ , si ha  $\mathbf{y} = S_t \mathbf{x}$  per qualche  $t$ , e dunque  $S_\tau \mathbf{y} = S_{t+\tau} \mathbf{x} \in \gamma(\mathbf{x})$  per ogni  $\tau \geq 0$ , da cui

$$\forall \tau \geq 0 : S_\tau \gamma(\mathbf{x}) \subseteq \gamma(\mathbf{x}).$$

Viceversa, sia  $\mathbf{y} \in \gamma(\mathbf{x})$ , sia  $t \geq 0$  e sia  $\mathbf{z} = S_{-t} \mathbf{y}$ . Allora  $\mathbf{z} \in \gamma(\mathbf{x})$  e  $S_t \mathbf{z} = \mathbf{y}$ , dunque  $\mathbf{y} \in S_t \gamma(\mathbf{x})$ , da cui

$$\forall t \geq 0 : \gamma(\mathbf{x}) \subseteq S_t \gamma(\mathbf{x}). \quad \square$$

Ricordiamo che l'*orbita positiva* uscente da  $\mathbf{x}$  è la curva

$$\gamma^+(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \exists t \geq 0, \mathbf{y} = S_t \mathbf{x}\}.$$

**Definizione 14.4.** Dato  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ , il suo *insieme  $\omega$ -limite* è dato da

$$\omega(X) := \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S_t X}.$$

Denoteremo con  $\omega(\mathbf{x})$  l'insieme  $\omega(\{\mathbf{x}\})$ .

Allo stesso modo chiamiamo *insieme  $\alpha$ -limite* di  $X$  l'insieme

$$\alpha(X) := \bigcap_{s<0} \overline{\bigcup_{t \leq s} S_t X}. \quad \star$$

Ponendo

$$W_s := \overline{\bigcup_{t \geq s} S_t X}$$

si ha che  $(W_s)$  è una famiglia monotona decrescente di chiusi in  $\mathbb{R}^n$ , quindi la prima intersezione per  $s > 0$  è una sorta di "limite" della successione di insiemi per  $s \rightarrow +\infty$ .

**Teorema 14.5.** *Si ha*

$$\omega(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \exists (t_k) \rightarrow +\infty, \lim_{k \rightarrow +\infty} S_{t_k} \mathbf{x} = \mathbf{y}\}.$$

*Dimostrazione.* Nel caso del singoletto si ha

$$W_s = \overline{\bigcup_{t \geq s} S_t \mathbf{x}} = \overline{\gamma^+(S_s \mathbf{x})}.$$

Sia  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$ , allora  $\mathbf{y} \in W_s$  per ogni  $s > 0$ , quindi in particolare  $\mathbf{y} \in \overline{\gamma^+(S_k \mathbf{x})}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ . Quindi per ogni  $k$  esiste  $\mathbf{y}_k \in \gamma^+(S_k \mathbf{x})$  con  $|\mathbf{y}_k - \mathbf{y}| < 1/k$ , ovvero esiste  $t_k \geq k$  tale che  $\mathbf{y}_k = S_{t_k} \mathbf{x}$ . Si ha  $t_k \rightarrow +\infty$  e

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{t_k} \mathbf{x} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{y}.$$

Viceversa, sia  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e  $(t_k) \rightarrow +\infty$  tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{t_k} \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Allora  $\mathbf{y} \in W_{t_k}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e, dalla monotonia decrescente di  $W_s$  si ha  $\mathbf{y} \in W_s$  per ogni  $s > 0$ , da cui  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$ .  $\square$

**Teorema 14.6 (Proprietà di  $\omega(\mathbf{x})$ ).** *Supponiamo che il semigruppoo  $\{S_t\}$  dipenda con continuità da  $t$  (che è vero se proviene da un'equazione differenziale).*

*Allora l'insieme  $\omega(\mathbf{x})$  è chiuso, positivamente invariante e si ha*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \omega(S_t \mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}),$$

*cioè l'insieme  $\omega$ -limite di un punto dipende solo dall'orbita che passa per quel punto.*

*Inoltre, se  $\gamma^+(\mathbf{x})$  è limitata, allora  $\omega(\mathbf{x})$  è compatto, non vuoto, connesso e invariante.*

*Dimostrazione.* Poniamo al solito

$$W_s = \overline{\bigcup_{t \geq s} S_t \mathbf{x}} = \overline{\gamma^+(S_s \mathbf{x})}.$$

Poiché  $\omega(\mathbf{x})$  è intersezione di chiusi, allora è un chiuso.

Vediamo che è positivamente invariante: sia  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$ , dal Teorema precedente esiste  $t_k \rightarrow +\infty$  tale che  $S_{t_k} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Sia  $t \geq 0$  e poniamo  $\tau_k := t + t_k$ ; allora

$$\lim_k S_{\tau_k} \mathbf{x} = S_t \lim_k S_{t_k} \mathbf{x} = S_t \mathbf{y},$$

dove abbiamo usato la continuità di  $S_t$  rispetto a  $t$ . Quindi abbiamo trovato una successione illimitata  $\tau_k$  che produce il termine  $S_t \mathbf{y}$ . Sempre dal Teorema precedente,  $S_t \mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$  e dunque l'insieme è positivamente invariante.

Ora calcoliamo  $\omega(S_t \mathbf{x})$ :

$$\omega(S_t \mathbf{x}) = \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{\tau \geq s} S_\tau S_t \mathbf{x}} = \bigcap_{s>0} \overline{\bigcup_{\tau \geq s+t} S_\tau \mathbf{x}} = \bigcap_{s>0} W_{s+t} = \bigcap_{s>0} W_s = \omega(\mathbf{x})$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la decrescenza della successione  $(W_s)$ .

Infine, se  $\gamma^+(\mathbf{x})$  è limitata, allora  $W_0$  è compatto e quindi  $W_s$  è compatto per ogni  $s > 0$ . Inoltre ogni  $W_s$  è non vuoto, quindi  $\omega(\mathbf{x})$  è intersezione di compatti non vuoti.

Ogni  $W_s$  è anche connesso, e non è difficile dimostrare che l'intersezione di compatti connessi di  $\mathbb{R}^n$  è connessa.

Resta da dimostrare che  $\omega(\mathbf{x})$  è negativamente invariante, ovvero che

$$\omega(\mathbf{x}) \subseteq S_t \omega(\mathbf{x}) \quad \text{per ogni } t \geq 0.$$

Siano  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$  e  $t_k \rightarrow +\infty$  tale che  $S_{t_k} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$  per  $k \rightarrow +\infty$ ; vogliamo trovare un elemento  $\mathbf{w} \in \omega(\mathbf{x})$  tale che  $S_t \mathbf{w} = \mathbf{x}$ . Ponendo  $\tau_k := t_k - t$ , si ha che  $\tau_k \rightarrow +\infty$  e per compattezza esiste una sottosuccessione  $\tau_{k_h}$  e  $\mathbf{w} \in \omega(\mathbf{x})$  tale che  $S_{\tau_{k_h}} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{w}$ . Ora calcoliamo, usando la continuità in  $t$  di  $S_t$ :

$$S_t \mathbf{w} = S_t \lim_h S_{\tau_{k_h}} \mathbf{x} = \lim_h S_{t_{k_h}} \mathbf{x} = \mathbf{x}. \quad \square$$

## 15 Attrattori e cicli limite

**Definizione 15.1.** Un chiuso invariante  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  si chiama *attrattivo* per un semigruppato  $(S_t)$  se esiste un intorno  $U$  di  $C$  (cioè  $U$  è un intorno di ogni punto di  $C$ ) tale che per ogni  $\mathbf{u} \in U$  si abbia

$$\forall t \geq 0 : S_t \mathbf{u} \in U, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S_t \mathbf{u}, C) = 0,$$

dove  $\text{dist}(\mathbf{x}, C) := \inf_{\mathbf{c} \in C} |\mathbf{x} - \mathbf{c}|$ . ★

Gli insiemi attrattivi possono essere molto grandi: ad esempio  $\mathbb{R}^n$  è sempre attrattivo. Vediamo invece una definizione che richiede che l'insieme non debba essere troppo grande.

**Definizione 15.2.** Un *attrattore* per un semigruppato è un insieme attrattivo che contiene un'orbita densa. ★

Per esempio, se  $\bar{\mathbf{x}}$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile, allora il singoletto  $\{\bar{\mathbf{x}}\}$  è un attrattore. Se invece  $\bar{\mathbf{x}}$  è una sella, allora  $\{\bar{\mathbf{x}}\}$  è l'insieme  $\omega$ -limite di alcune traiettorie ma non è un attrattore.

**Esempio 15.3.** Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

si ha che la circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  ( $r = 1$ ) è un attrattore. ★

**Esempio 15.4.** Il *sistema di Lorenz*, studiato poi dal matematico e meteorologo Edward Lorenz nel 1963, è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

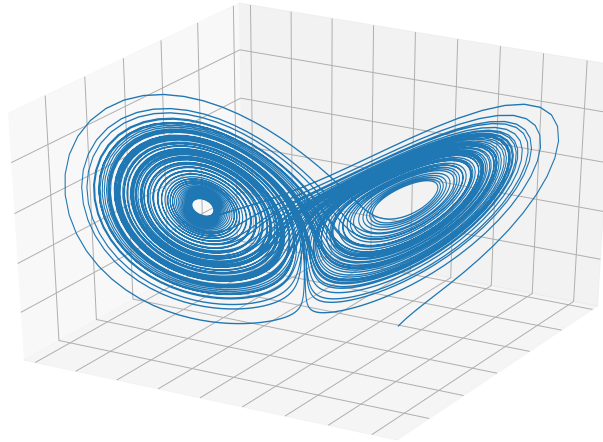


Figura 11: Un'orbita del sistema di Lorenz che tende verso l'attrattore.

con  $\sigma, b, r$  positivi ( $r$  è il *numero di Rayleigh* per il moto di un fluido).

Per  $r \leq 1$  esiste solo la posizione di equilibrio nulla, per  $r > 1$  esistono anche le due posizioni  $(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ . La posizione nulla è stabile per  $r < 1$  e anche per  $r = 1$  (con funzione di Ljapunov  $W = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$ ), mentre per le altre due posizioni il polinomio caratteristico della matrice di linearizzazione è

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

e col criterio di Liénard-Chipart si può dimostrare che sono stabili per

$$1 < r < \bar{r} := \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Dunque in  $r = 1$  c'è una biforcazione a forca, mentre per  $r = \bar{r}$  si può dimostrare che c'è una biforcazione di Hopf. I cicli stabili di Hopf però restano stabili per valori di  $r$  di poco superiori a  $\bar{r}$ .

Nel caso studiato da Lorenz i parametri valgono  $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ , dunque si ha

$$r > \bar{r} = 470/19 \approx 24.74 \quad \star$$

e sia le posizioni di equilibrio che i cicli di Hopf sono instabili. In questo caso esiste un *attrattore strano*, ovvero un attrattore di dimensione frattale, e il sistema è caotico.

**Esercizio 15.5.** Disegnare le orbite del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Mostrare che  $[-1, 1] \times \{0\}$  è attrattivo. Tale insieme è anche un attrattore? E l'insieme  $]0, 1] \times \{0\}$ ?

**Definizione 15.6.** Un *ciclo*, o *orbita periodica*, è un'orbita fatta da una linea chiusa  $\gamma$ .

Un ciclo  $\gamma$  si dice *ciclo stabile* se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\forall \mathbf{u} : \text{dist}(\mathbf{u}, \gamma) < \delta \quad \Rightarrow \quad \forall t \geq 0 : \text{dist}(S_t \mathbf{u}, \gamma) < \varepsilon.$$

Un ciclo  $\gamma$  si dice *ciclo asintoticamente stabile* se è stabile e esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\forall \mathbf{u} : \text{dist}(\mathbf{u}, \gamma) < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \text{dist}(S_t \mathbf{u}, \gamma) = 0. \quad \star$$

Per esempio, i cicli di un centro sono stabili ma non asintoticamente, mentre il ciclo  $r = 1$  dell'Esempio 15.3 è asintoticamente stabile.

Ora ci mettiamo in  $\mathbb{R}^2$ .

**Definizione 15.7.** Un *ciclo limite* è un ciclo che è anche insieme  $\omega$ -limite di un punto fuori da esso. ★

Si verifica facilmente che un ciclo limite stabile è anche asintoticamente stabile, ed è un attrattore.

Legato ai cicli limite c'è un famoso problema di Hilbert, il XVI: quanti cicli limite ci sono al massimo per un sistema (bidimensionale) polinomiale?

Si sa che nel caso di polinomi di grado uno non esistono cicli limite: è il caso lineare. Ma già se i polinomi a secondo membro hanno grado due la risposta non è nota; per anni si è creduto che fosse al più tre cicli limite, finché nel 1979 il matematico cinese Shi Songling ha mostrato un esempio di grado due con quattro cicli limite. L'esempio è veramente pazzesco:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\lambda x - y - 10x^2 + (5 - \delta)xy + y^2 \\ \dot{y} = x + x^2 + (9\delta - 8\varepsilon - 25)xy \end{cases}$$

con  $\delta = 10^{-13}$ ,  $\varepsilon = 10^{-52}$  e (udite udite)  $\lambda = 10^{-200}$ . Tale sistema non è neppure lontanamente simulabile al calcolatore.

Comunque esiste un teorema di Dulac-Il'iashenko che garantisce che in ogni sistema analitico (e quindi anche in ogni sistema polinomiale) il numero di cicli limite debba essere finito. Vale anche il seguente teorema, sempre nel caso piano:

**Teorema 15.8 (Teorema di Poincaré-Bendixson).** Sia  $n = 2$  e sia dato il sistema piano  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$  con  $\mathbf{F}$  di classe  $C^1$ . Supponiamo che esista un punto  $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^2$  tale che  $\gamma^+(\mathbf{u}_0)$  sia limitata. Allora, o  $\omega(\mathbf{u}_0)$  contiene almeno un punto di equilibrio, o  $\omega(\mathbf{u}_0)$  è un'orbita periodica (e quindi un ciclo limite).

Il Teorema di Poincaré-Bendixson ci dice che nei sistemi bidimensionali non possono esistere orbite caotiche (usiamo questa locuzione anche se non l'abbiamo mai definita precisamente): infatti, se abbiamo un'orbita positiva limitata, o tale orbita tende verso un punto di equilibrio, o tende verso un'orbita periodica. Non può avvenire un fenomeno come quello del sistema di Lorenz.

**Esempio 15.9.** Il sistema bidimensionale in coordinate polari

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \vartheta \\ \dot{\vartheta} = 1 \end{cases}$$

con  $0 < \mu < 1$  ammette la regione limitata positivamente invariante

$$\sqrt{1 - \mu} < r < \sqrt{1 + \mu}$$

che non contiene punti di equilibrio, e dunque per il Teorema di Poincaré-Bendixson contiene un ciclo limite. ★

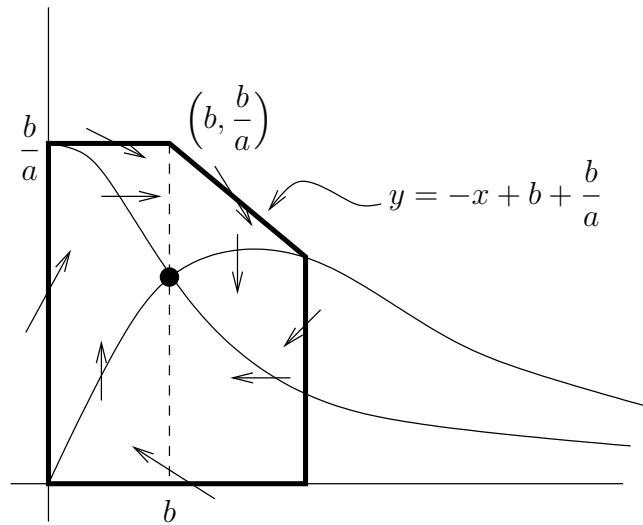


Figura 12: La regione pentagonale positivamente invariante del sistema della glicolisi.

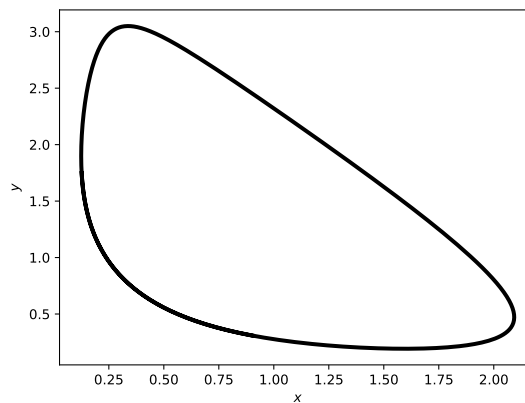


Figura 13: Il ciclo limite del sistema della glicolisi nel caso  $a = 0.05$ ,  $b = 0.5$ .

**Esempio 15.10 (Glicolisi).** La glicolisi è la reazione chimica organica che produce energia partendo dal glucosio. In un modello *estremamente* semplificato si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + x^2y \\ \dot{y} = b - ay - x^2y \end{cases} \quad \star$$

dove i parametri  $a, b$  sono positivi,  $x$  è legata alla concentrazione di ADP (adenosildifosfato) e  $y$  a quella di F6P (fruttosio 6-fosfato, ricavato dal glucosio), e il sistema è stato adimensionalizzato.

Tale sistema, che ha senso nel primo quadrante, ammette una sola posizione di equilibrio  $(b, \frac{b}{a+b^2})$  che linearizzando risulta essere una sorgente per alcuni valori di  $a, b$  (precisamente quelli per cui  $b^4 + (2a - 1)b^2 + a(a + 1) < 0$ ). Si può poi dimostrare che esiste una regione pentagonale positivamente invariante che contiene la posizione di equilibrio. Poiché la posizione è una sorgente, il Teorema di Poincaré-Bendixson garantisce l'esistenza di un ciclo limite.

## 16 Modelli di dinamica delle popolazioni

### 16.1 Modelli a una popolazione

Denotiamo con  $x(t)$  una misura della quantità di una specie all'istante  $t$  e facciamo alcune ipotesi:

- $x$  è una variabile continua, cioè un numero reale; più che il numero di individui,  $x$  denota una grandezza come la biomassa o la densità.
- si suppone  $x \geq 0$
- le popolazioni si riproducono in modo continuo e non discreto.

Introduciamo la quantità

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$$

detta *tasso di crescita* o *tasso di riproduzione*.

#### 16.1.1 Modello di Malthus

Nel **modello di Malthus** si fa l'ipotesi più semplice, ovvero che il tasso di riproduzione sia costante:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \gamma$$

da cui si ottiene subito l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{\gamma t}.$$

Se  $\gamma > 0$ , la popolazione cresce esponenzialmente, se  $\gamma < 0$  la popolazione decresce esponenzialmente e tende all'estinzione.

#### 16.1.2 Modello logistico

La crescita esponenziale può essere ragionevole per brevi periodi, ma per tempi lunghi le risorse limitate cominceranno a pesare molto. Si introduce quindi il **modello logistico**, in cui si suppone che

$$\frac{\dot{x}}{x} = \gamma \left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad \gamma, K > 0.$$

Il tasso di crescita viene quindi supposto decrescente nel numero di individui, in modo lineare. L'equazione differenziale che ne risulta è

$$\dot{x}(t) = \gamma x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right), \quad (9)$$

che ha soluzione

$$x(t) = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-\gamma t}}.$$

Per  $t \rightarrow +\infty$  si ha quindi che  $x(t) \rightarrow K$  e la popolazione non cresce illimitatamente;  $K$  rappresenta la capacità massima di sopportazione dell'ambiente.

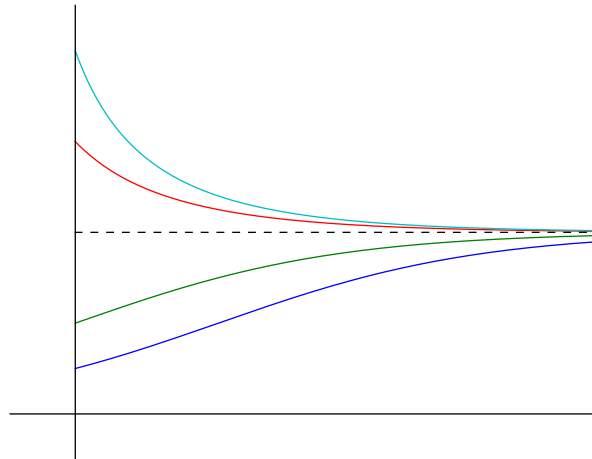


Figura 14: L'andamento nel tempo delle soluzioni del modello logistico.

### 16.1.3 Caso generale a una popolazione

In generale, per tener conto delle risorse limitate dell'ambiente, si hanno modelli del tipo

$$\frac{\dot{x}}{x} = f(x)$$

dove  $f(x)$  è una funzione decrescente in  $x$ , che parte da valori positivi e arriva a valori negativi: nel caso logistico si ha

$$f(x) = \gamma \left(1 - \frac{x}{K}\right).$$

L'unico valore  $\bar{x}$  per cui  $f(\bar{x}) = 0$  è l'equilibrio del sistema ecologico e poiché

$$(xf(x))' \Big|_{\bar{x}} = \left[ f(x) + xf'(x) \right]_{\bar{x}} = \bar{x}f'(\bar{x}),$$

se  $f'(\bar{x}) < 0$  si ha che  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile (e in ogni caso, poiché il problema è unidimensionale, se  $f$  è decrescente la posizione  $\bar{x}$  è stabile).

## 16.2 Modelli preda-predatore

Passiamo ora a modelli a due specie: i più studiati sono quelli di tipo preda-predatore, in cui una specie è la fonte principale di cibo per l'altra. Denotando con  $x$  le prede e con  $y$  i predatori, si costruisce un modello del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = xf(x, y) \\ \dot{y} = yg(x, y) \end{cases}$$

in cui il tasso di crescita delle prede  $f(x, y)$  deve essere una funzione decrescente in  $y$  mentre il tasso di crescita dei predatori  $g(x, y)$  deve essere una funzione crescente in  $x$ .

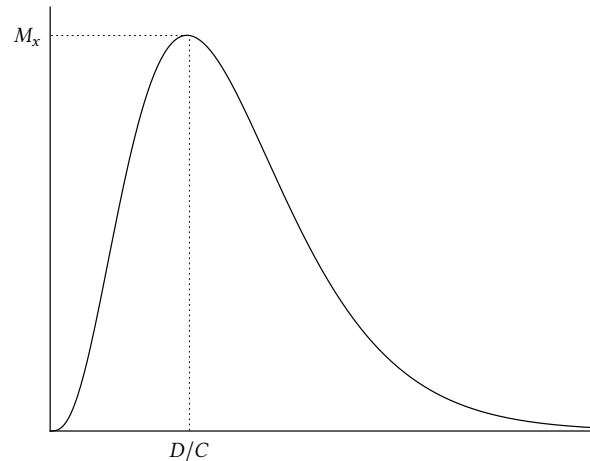


Figura 15: L'andamento della funzione  $f(x) = x^D e^{-Cx}$ .

### 16.2.1 Modello di Lotka-Volterra

Se facciamo la scelta lineare  $f(x, y) = A - By$  e  $g(x, y) = Cx - D$ , con  $A, B, C, D > 0$ , otteniamo il celeberrimo *sistema di Lotka-Volterra*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - By) \\ \dot{y} = y(Cx - D). \end{cases}$$

Tale sistema ha le posizioni di equilibrio  $(0, 0)$  e  $(D/C, A/B)$ , entrambe biologicamente accettabili. Procedendo per linearizzazione, la posizione nulla è instabile (sella), mentre sull'altra non possiamo pronunciarsi, essendo gli autovalori immaginari puri.

Per questa posizione però possiamo costruire una funzione di Ljapunov:

$$W(x, y) = Cx - D \ln x + By - A \ln y.$$

Infatti, tale funzione è definita su tutto il primo quadrante e ha un minimo stretto nella posizione di equilibrio. Inoltre

$$\nabla W \cdot F = x \left( C - \frac{D}{x} \right) (A - By) + y \left( B - \frac{A}{y} \right) (Cx - D) = 0.$$

Quindi la posizione  $(D/C, A/B)$  è stabile semplicemente e le traiettorie stanno sulle curve di livello della funzione  $W$ .

Per disegnare tali curve, cambiamo segno e passiamo all'esponenziale:

$$W = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad e^{-W} = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^D}{e^{Cx}} \frac{y^A}{e^{By}} = f(x)g(y) = \text{cost}.$$

Studiamo brevemente la funzione  $f(x) = x^D e^{-Cx}$  per  $x > 0$ : essa è sempre positiva, tende a 0 per  $x \rightarrow 0^+$  e per  $x \rightarrow +\infty$ , ha un solo massimo in  $D/C$  e tale massimo vale  $M_x := (D/C)^D e^{-D}$  (si veda la Figura 15).

Analogamente, la funzione  $g(y) = y^A e^{-By}$  ha un solo massimo in  $A/B$  e tale massimo vale  $M_y := (A/B)^A e^{-A}$ .

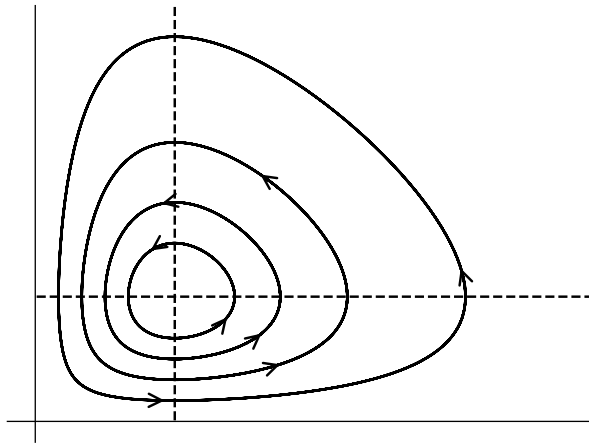


Figura 16: Orbite del sistema di Lotka-Volterra.

Poiché le curve di livello sono della forma

$$f(x)g(y) = k,$$

si hanno i seguenti casi:

- se  $k > M_x M_y$  non ci sono punti;
- se  $k = M_x M_y$  la curva si riduce al solo punto  $(D/C, A/B)$ ;
- se  $0 < k < M_x M_y$ , si ha che  $k/M_y < M_x$ , dunque l'equazione  $f(x) = k/M_y$  ha esattamente due soluzioni  $x_m < D/C < x_M$  e per tali soluzioni si deve avere per forza  $g(y) = M_y$ , da cui  $y = A/B$  e troviamo due punti  $(x_m, A/B)$ ,  $(x_M, A/B)$ . Allo stesso modo  $k/M_x < M_y$ , dunque l'equazione  $g(y) = k/M_x$  ha esattamente due soluzioni  $y_m < A/B < y_M$  e per tali soluzioni si ha  $f(x) = M_y$ , da cui  $x = D/C$  e troviamo due punti  $(D/C, y_m)$ ,  $(D/C, y_M)$ . Tutta la curva di livello risulta compresa nel rettangolo delimitato dalle rette  $x = x_{m,M}$  e  $y = y_{m,M}$ .

Fissato poi  $x \in (x_m, x_M)$ , l'equazione  $g(y) = k/f(x)$  ha esattamente due soluzioni  $y_1(x) < A/B < y_2(x)$ , quindi per ogni  $x_m < x < x_M$  troviamo due punti  $(x, y_1(x))$  e  $(x, y_2(x))$ .

In particolare le orbite hanno i vertici tutti allineati sulle rette  $x = D/C$  e  $y = A/B$ .

### 16.2.2 Numero medio di prede e predatori

Abbiamo visto che le soluzioni del sistema sono periodiche. Anche se il periodo  $T$  dipende dalle condizioni iniziali, e non è semplice da calcolare,<sup>(11)</sup> possiamo calcolare qual è il numero medio di individui: consideriamo la prima equazione e integriamola da 0 a  $T$ :

$$\int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \int_0^T (A - By(t)) dt \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{x(T)}{x(0)} = AT - B \int_0^T y(t) dt.$$

<sup>(11)</sup>Linearizzando il sistema, è facile vedere che per condizioni iniziali vicino alla posizione di equilibrio stabile le traiettorie hanno periodo  $T = 2\pi/\sqrt{AD}$ . Per condizioni iniziali più lontane, invece, il periodo aumenta.

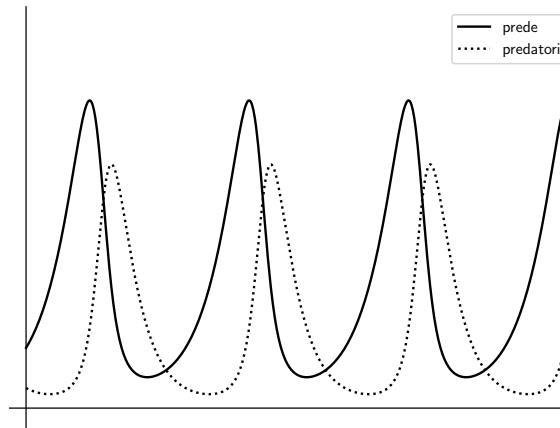


Figura 17: Le due componenti di una traiettoria del sistema di Lotka-Volterra.

Poiché  $x(0) = x(T)$ , il primo termine si annulla e troviamo

$$\frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt = \frac{A}{B}.$$

Quindi il numero medio di predatori in un periodo coincide col valore dei predatori nella posizione di equilibrio. La stessa cosa vale per le prede.

Questo significa che, indipendentemente dalle condizioni iniziali, tutte le soluzioni del sistema di Lotka-Volterra hanno lo stesso numero medio di individui.

### 16.2.3 Il caso della pesca

Vito Volterra inventò e studiò il modello che porta il suo nome stimolato da un problema riguardante la pesca nel Mare Adriatico durante la I Guerra Mondiale, postogli dal genero, il medico Umberto D'Ancona, nel 1926. La domanda è: se aggiungiamo un termine negativo proporzionale alla quantità di individui di entrambe le specie (tipo pesca), come cambia la posizione di equilibrio?

La risposta è semplice. Denotiamo con  $P > 0$  la proporzione di pesce pescata; il sistema diventa

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - By) - Px \\ \dot{y} = y(Cx - D) - Py \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = x((A - P) - By) \\ \dot{y} = y(Cx - (D + P)). \end{cases}$$

Nel caso  $A > P$  otteniamo ancora un sistema di Lotka-Volterra, la cui posizione di equilibrio stabile è

$$\left( \frac{D + P}{C}, \frac{A - P}{B} \right).$$

Rispetto alla situazione senza pesca, la posizione si sposta in basso a destra, col risultato che l'azione della pesca fa crescere il numero medio delle prede e calare quello dei predatori.

Se invece  $A < P$ , il sistema non è più di Lotka-Volterra: l'unica posizione di equilibrio è  $(0, 0)$  e si prova subito per linearizzazione che è asintoticamente stabile. Quindi il sistema va verso l'estinzione.

#### 16.2.4 Modello preda-predatore logistico

Nel modello di Lotka-Volterra, se non ci sono prede i predatori decrescono verso l'estinzione. Viceversa, se non ci sono predatori le prede sono destinate a crescere esponenzialmente; se si vuole invece tenere conto delle risorse limitate, si può mettere un termine di correzione logistica nella prima equazione:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - By - Ex) \\ \dot{y} = y(Cx - D) \end{cases} \quad E > 0.$$

In questo caso si trovano tre posizioni di equilibrio:

$$O(0, 0), \quad P_1\left(\frac{A}{E}, 0\right), \quad P_2\left(\frac{D}{C}, \frac{AC - DE}{BC}\right),$$

con  $P_2$  accettabile solo se  $AC > DE$ . Per linearizzazione si trova che  $O$  è instabile (sella), mentre  $P_1$  è asintoticamente stabile per  $AC < DE$ ; in questo caso si arriva all'estinzione dei predatori. Per  $AC > DE$  la posizione  $P_1$  diventa instabile mentre  $P_2$  è asintoticamente stabile (si tratta di nodo o di fuoco?).

Il caso  $AC = DE$  non può essere studiato per linearizzazione.

#### 16.2.5 Modelli preda-predatore con tasso di crescita non lineare

Tra questi è notevole il *modello di Gomatam* (1974), che è molto simile al Lotka-Volterra ma assume tassi di crescita logaritmici:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - B \ln y) \\ \dot{y} = y(C \ln x - D) \end{cases}$$

Anche se sembra più complicato, in realtà il cambio di variabili

$$\xi = \ln x, \quad \eta = \ln y$$

permette di trasformarlo in un sistema lineare, quindi completamente risolvibile.

Anche il *modello di Gomatam logistico*

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - B \ln y - E \ln x) \\ \dot{y} = y(C \ln x - D - F \ln y) \end{cases}$$

diventa lineare con lo stesso cambio di variabili.

Un problema di questi modelli è che il tasso di crescita delle specie non è limitato; è stato quindi proposto il seguente modello

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - B(1 - e^{-\alpha y})) \\ \dot{y} = y(C(1 - e^{-\beta x}) - D) \end{cases}$$

in cui si deve assumere che  $\alpha, \beta > 0$  e  $B > A, C > D$ . In questo modello il comportamento è simile a quello del sistema di Lotka-Volterra, ma i tassi di crescita sono limitati.

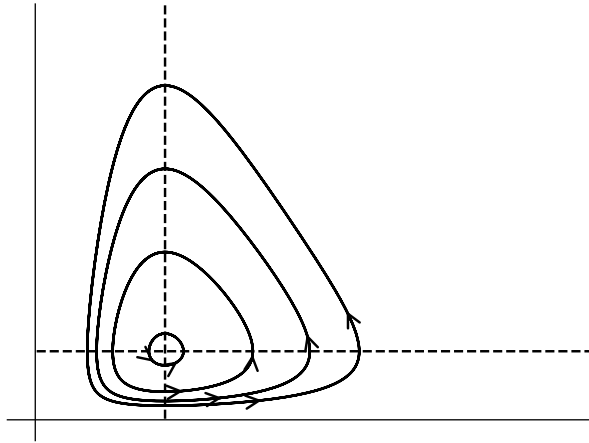


Figura 18: Orbite del sistema di Gomatam.

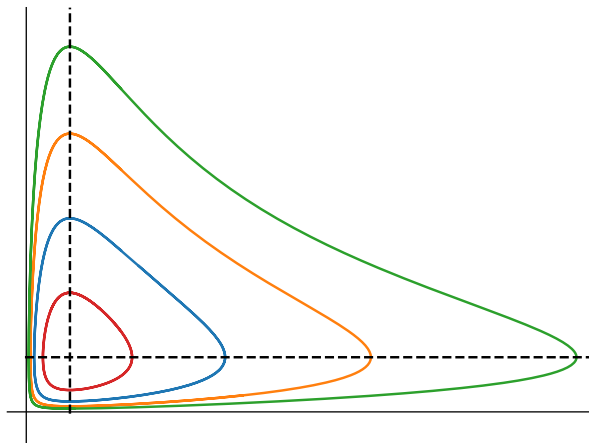


Figura 19: Orbite del sistema con tassi di crescita limitati.

**Esercizio 16.1.** P. H. Leslie, (Biometrika, Vol. 35, No. 3/4, 1948, pp. 213–245) ha proposto un modello preda-predatore leggermente diverso da quello di Lotka-Volterra, dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = x(A - By) \\ \dot{y} = y\left(C - D\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

in cui il tasso di crescita dei predatori tiene conto del rapporto tra numero di predatori e numero di prede. Si studi questo modello confrontandolo col Lotka-Volterra classico.

### 16.3 Altri modelli a due popolazioni

Si possono descrivere altri modi di interazione tra due specie: noi vedremo il commensalismo, il mutualismo o simbiosi e la competizione.

In generale se i tassi di crescita sono supposti affini, il modello a due specie si scrive

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} + a_{12}y\right) \\ \dot{y} = \gamma_2 y \left(1 + a_{21}x - \frac{y}{K_2}\right), \end{cases} \quad \gamma_i, K_i > 0, a_{ij} \in \mathbb{R} \quad (10)$$

dove  $K_1, K_2$  rappresentano le capacità del sistema biologico rispettivamente per le specie  $x, y$  (il modello di Lotka-Volterra non è compreso in questo sistema: per averlo bisognerebbe prendere  $K_1, K_2 \rightarrow \infty$  e  $\gamma_2 < 0$ ). Poniamo poi

$$A := \begin{bmatrix} -1/K_1 & a_{12} \\ a_{21} & -1/K_2 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Se  $a_{21} > 0$  e  $a_{12} = 0$  si parla di *commensalismo*: la prima specie non sente nessuna influenza da parte della seconda, mentre la seconda guadagna dalla presenza della prima. In questo caso esiste una posizione di equilibrio senza estinzioni asintoticamente stabile.

Se  $a_{12}, a_{21} > 0$  si parla di *mutualismo*: ogni specie guadagna dalla presenza dell'altra. Qui si ha una posizione di equilibrio che cambia la stabilità in funzione del segno di  $\det A$ .

Infine, se  $a_{12}, a_{21} < 0$  si parla di *competizione*: le due specie si svantaggiano a vicenda. In questo caso la situazione è più varia e possono distinguersi tre casi:

- c'è solo una posizione di equilibrio asintoticamente stabile, che prevede l'estinzione dell'una o dell'altra specie;
- c'è una posizione asintoticamente stabile che prevede la coesistenza delle due specie;
- a seconda delle condizioni iniziali il sistema tende verso l'estinzione dell'una o dell'altra specie.

Questo fatto mette in dubbio il cosiddetto *principio di esclusione competitiva*, spesso assunto in Biologia, secondo cui tra due specie in competizione la più avvantaggiata prenderà sempre il sopravvento. Invece, secondo il modello presentato, il sopravvento può dipendere dalle condizioni iniziali e non solo dalle prerogative di ogni specie. Inoltre, per altre scelte dei coefficienti esiste anche una posizione di equilibrio asintoticamente stabile in cui le due specie coesistono.

Studiamo il modello (10). Per ridurre il numero dei parametri introduciamo le quantità

$$\tilde{x} := x/K_1, \quad \tilde{y} := y/K_2, \quad \tilde{t} := t/\gamma_1,$$

in modo che il sistema si possa riscrivere come

$$\begin{cases} \tilde{x}' = \tilde{x}(1 - \tilde{x} + (a-1)\tilde{y}) \\ \tilde{y}' = \gamma\tilde{y}(1 + (b-1)\tilde{x} - \tilde{y}) \end{cases} \quad (12)$$

dove  $\tilde{x}', \tilde{y}'$  sono le derivate rispetto al nuovo tempo  $\tilde{t}$  e abbiamo posto, per comodità,

$$a := 1 + a_{12}K_2, \quad b := 1 + a_{21}K_1, \quad \gamma := \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

In questo modo il sistema (12) dipende solo da tre parametri:  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $\gamma > 0$  e le condizioni sul tipo di sistema (mutualismo, commensalismo, competizione) si danno sui segni di  $a-1$  e  $b-1$ . Si verifica che le posizioni di equilibrio sono

$$O = (0, 0), \quad P_1 = (1, 0), \quad P_2 = (0, 1), \quad P_3 = \left( \frac{a}{a+b-ab}, \frac{b}{a+b-ab} \right)$$

e l'ultima è accettabile solo per certe condizioni di segno sui parametri. La matrice jacobiana del sistema è

$$J(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{bmatrix} 1 - 2\tilde{x} + (a-1)\tilde{y} & (a-1)\tilde{x} \\ \gamma(b-1)\tilde{y} & \gamma(1 + (b-1)\tilde{x} - 2\tilde{y}) \end{bmatrix}$$

e si ha

$$\begin{aligned} J(O) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, & J(P_1) &= \begin{bmatrix} -1 & a-1 \\ 0 & \gamma b \end{bmatrix}, \\ J(P_2) &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ \gamma(b-1) & -\gamma \end{bmatrix}, & J(P_3) &= \frac{1}{a+b-ab} \begin{bmatrix} -a & a(a-1) \\ \gamma b(b-1) & -\gamma b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La posizione  $O$  è sempre instabile (sorgente), mentre la stabilità delle altre dipende dai segni dei coefficienti. Inoltre si verifica che

$$\det J(P_3) = \gamma \frac{ab}{a+b-ab}.$$

Si noti inoltre che

$$a > 0 \Leftrightarrow a_{12} > -1/K_2, \quad b > 0 \Leftrightarrow a_{21} > -1/K_1, \quad a+b-ab > 0 \Leftrightarrow a_{12}a_{21} > \frac{1}{K_1K_2} \Leftrightarrow \det A > 0$$

dove  $A$  è la matrice definita in (11).

Cominciamo studiando il caso  $a+b-ab < 0$ , cioè  $\det A < 0$ :

- se  $a < 0$  e  $b < 0$  le posizioni  $P_1, P_2$  sono asintoticamente stabili e  $P_3$  è accettabile ma è una sella;
- se  $a > 0$  e  $b < 0$ ,  $P_1$  è asintoticamente stabile,  $P_2$  è instabile e  $P_3$  non è accettabile;
- se  $a < 0$  e  $b > 0$ ,  $P_2$  è asintoticamente stabile,  $P_1$  è instabile e  $P_3$  non è accettabile;

- se  $a > 0$  e  $b > 0$ , non ci sono posizioni stabili e  $P_3$  non è accettabile: in questo caso il numero di individui esplode (non può succedere nel caso competitivo).

Nel caso  $a + b - ab > 0$ , cioè  $\det A > 0$ , invece si ha:

- se  $a < 0$  e  $b < 0$  non può essere  $1 - ab > 0$ ;
- se  $a > 0$  e  $b < 0$ ,  $P_1$  è asintoticamente stabile,  $P_2$  è instabile e  $P_3$  non è accettabile;
- se  $a < 0$  e  $b > 0$ ,  $P_2$  è asintoticamente stabile,  $P_1$  è instabile e  $P_3$  non è accettabile;
- se  $a > 0$  e  $b > 0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  sono instabili e  $P_3$  è asintoticamente stabile.

**Esercizio 16.2.** Si studi il sistema (10) con i coefficienti (di tipo competitivo)

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 3, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

## 17 Modelli economici

Vedremo in questa sezione alcuni semplici modelli economici.

### 17.1 Modelli economici a domanda e offerta

Denotiamo con  $D$  la domanda di un bene, con  $S$  (*supply*) la sua offerta e con  $P$  il prezzo.

**Postulato 1** (Legge della domanda e dell'offerta) Il prezzo  $P$  di un bene cresce nel tempo se  $D \geq S$ , decresce se  $D \leq S$ . Usando le derivate possiamo scrivere

$$\dot{P}(D - S) \geq 0.$$

Nel modello più semplice possiamo supporre una dipendenza lineare di  $\dot{P}$  da  $D - S$ , ovvero esiste una funzione del tempo  $J(t)$  non negativa tale che

$$\dot{P} = J(t)(D(t) - S(t)). \quad (13)$$

Alcuni modelli più sofisticati considerano la  $J$  positiva solo in media, oppure mettono un termine di ritardo nella  $J$ , o ancora suppongono una dipendenza non lineare.

Restano però tre incognite e una sola equazione. Aggiungiamo quindi un'altra ipotesi.

**Postulato 2** Supporremo che  $D$  sia una funzione decrescente di  $P$ , mentre  $S$  sia una funzione crescente di  $P$ .

Anche in questo caso, la scelta più semplice ci porta ad assumere

$$D(P) = \alpha - \beta P, \quad S(P) = -\gamma + \delta P$$

dove le costanti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono strettamente positive. Sostituendo in (13), otteniamo l'equazione differenziale

$$\dot{P} = J(t)(\alpha + \gamma - (\beta + \delta)P),$$

che ammette la posizione di equilibrio

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Se supponiamo  $J(t)$  costante, l'equazione è autonoma e la posizione  $\bar{P}$  è globalmente esponenzialmente stabile. La soluzione generale è

$$P(t) = (P_0 - \bar{P})e^{-J(\beta + \delta)t} + \bar{P}.$$

Quindi il mercato tende all'equilibrio (si noti che per avere stabilità del mercato è sufficiente richiedere che  $\beta + \delta > 0$ , e non che entrambi siano positivi).

Si può invece assumere che la domanda non sia lineare nel prezzo, ma ad esempio quadratica:

$$D(P) = a + bP - cP^2, \quad a, c > 0.$$

Se  $b < 0$  la domanda è sempre decrescente nel prezzo, se invece  $b > 0$  si possono avere situazioni per prezzi bassi (prima del vertice della parabola) in cui la domanda cresce anche se cresce il prezzo, per poi decrescere rapidamente. Se supponiamo di nuovo l'offerta lineare in  $P$  e  $J$  costante, otteniamo

$$\dot{P} = J(a + \gamma + (b - \delta)P - cP^2),$$

che è un'equazione di Bernoulli. Anche in questo caso si trova una sola posizione di equilibrio accettabile, cioè positiva, data da

$$\bar{P} = \frac{1}{2c} \left( b - \delta + \sqrt{(b - \delta)^2 + 4c(a + \gamma)} \right)$$

ed è sempre asintoticamente stabile.

### 17.1.1 Modelli a più beni

Si possono trattare anche modelli in cui più beni competono sul mercato:

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n), \quad \mathbf{D} = (D_1, \dots, D_n), \quad \mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n).$$

Facendo ancora la scelta lineare si può ipotizzare che

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{A}\mathbf{P}, \quad \mathbf{S} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{B}\mathbf{P}$$

dove  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$  sono vettori costanti e  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  sono matrici quadrate definite rispettivamente la prima negativa e la seconda positiva. Se si considera la matrice diagonale

$$\mathbf{J} = \text{diag}(J_1, \dots, J_n)$$

si ottiene il sistema differenziale

$$\dot{P} = J[\alpha - \beta + (A - B)P],$$

che ha la posizione di equilibrio

$$\bar{P} = (B - A)^{-1}(\alpha - \beta).$$

Poiché il gradiente del secondo membro è costante ed è dato da  $J(A - B)$ , che è definita negativa, la posizione è stabile e il mercato tende all'equilibrio.

### 17.1.2 Modelli ad aspettativa di prezzo

In questi modelli si suppone che  $D$  ed  $S$  possano dipendere anche da  $\dot{P}$ , e non solo da  $P$ . In questo modo anche la "storia" del prezzo può influire sulla domanda e sull'offerta. Facendo l'ipotesi di dipendenza lineare si ha

$$D(P, \dot{P}) = \alpha - \beta P + a\dot{P}, \quad S(P, \dot{P}) = -\gamma + \delta P + b\dot{P}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Supponendo al solito  $J$  costante si ha

$$(1 - J(a - b))\dot{P} = J(\alpha + \gamma - (\beta + \delta)P)$$

e, se  $J(a - b) \neq 1$ , si trova di nuovo la posizione di equilibrio

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Stavolta tale posizione è asintoticamente stabile se  $J(a - b) < 1$ , mentre è instabile se  $J(a - b) > 1$ . In quest'ultimo caso si ha che il prezzo tende all'infinito!

Si può introdurre allora un fattore di correzione in modo che il termine  $J(a - b)$  sia decrescente con  $P$ :

$$J(a - b) = 1 + c - mP, \quad m > 0$$

e dunque si ottiene l'equazione

$$\dot{P} = \frac{J(\alpha + \gamma - (\beta + \delta)P)}{mP - c} =: F(P).$$

L'unica posizione di equilibrio è ancora  $\bar{P}$ , e si ha

$$F'(\bar{P}) = -J \frac{\beta + \delta}{m\bar{P} - c},$$

quindi l'equilibrio è stabile se  $c/m < \bar{P}$  (ovvero  $c/m$  non deve essere troppo grande).

## 17.2 Modelli economici di crescita

In questi modelli, basati sulla teoria di Keynes, si studia l'evoluzione del prodotto interno lordo di uno stato.

Sia  $Y$  il prodotto interno di uno stato e  $C$  il consumo, con l'ipotesi che

$$0 < C < Y.$$

Denotiamo con  $c := C/Y$  la *propensione al consumo*; si ha  $0 < c < 1$ . Sia  $I$  l'investimento privato e  $G$  l'investimento statale, assunto come funzione nota del tempo, di modo che

$$Y = C + I + G. \quad (14)$$

Si suppone che  $I$  sia una funzione crescente di  $\dot{C}$ . Facendo la scelta lineare

$$I = \beta \dot{C}$$

da (14) si ottiene l'equazione differenziale

$$Y = cY + \beta \dot{c}Y + \beta c \dot{Y} + G$$

da cui

$$\dot{Y} = \frac{(1-c)Y - G}{\beta c}.$$

Supponendo  $c, G$  costanti si trova la posizione di equilibrio instabile

$$\bar{Y} = \frac{G}{1-c}$$

(la stabilità in questi modelli è vista in modo negativo, perché sintomo di stagnazione) e la soluzione è

$$Y(t) = (Y_0 - \bar{Y})e^{\frac{1-c}{\beta c}t} + \bar{Y},$$

che tende a  $+\infty$ .

Cambiamo ora ipotesi e supponiamo che  $I$ , oltre a essere una funzione crescente di  $\dot{C}$ , sia decrescente in  $\dot{I}$ . Nel caso lineare si ha

$$I = \beta \dot{C} - \gamma \dot{I}$$

e si pone un limite alla crescita degli investimenti. Supponiamo poi che la (14) sia modificata in

$$Y = C + I + G - \lambda \dot{Y}, \quad \lambda > 0$$

in modo che se  $Y$  è inferiore alla quantità  $C + I + G$  ci sia una tendenza ad aumentare  $Y$ . Allora, ricordando che  $C = cY$ , si ottiene

$$\dot{I} = \frac{1}{\gamma}(\beta \dot{C} - I) = \frac{1}{\gamma}(\beta c \dot{Y} - I)$$

e

$$\dot{Y} = \frac{1}{\lambda}(C + I + G - Y) = \frac{1}{\lambda}(I + G - (1-c)Y),$$

da cui si ricava il sistema bidimensionale del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{I} = \frac{1}{\lambda \gamma} [(\beta c - \lambda)I - \beta c(1-c)Y + \beta cG] \\ \dot{Y} = \frac{1}{\lambda} [I - (1-c)Y + G]. \end{cases}$$

La matrice del sistema è

$$\frac{1}{\lambda \gamma} \begin{bmatrix} \beta c - \lambda & -\beta c(1-c) \\ \gamma & -\gamma(1-c) \end{bmatrix}$$

e ha determinante sempre positivo, mentre la traccia è

$$\frac{1}{\lambda \gamma} ((\beta + \gamma)c - \lambda - \gamma).$$

Quindi l'equilibrio è asintoticamente stabile (stagnazione) per  $c < (\lambda + \gamma)/(\beta + \gamma)$ , è un centro (quindi produce oscillazioni) per  $c = (\lambda + \gamma)/(\beta + \gamma)$  ed è instabile per  $c > (\lambda + \gamma)/(\beta + \gamma)$ .

## 18 Sistemi dinamici discreti

**Definizione 18.1 (Sistema dinamico discreto).** Dato un insieme  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $F : D \times \mathbb{N} \rightarrow D$ , un *sistema dinamico discreto* (o *mappa iterata*) è un'equazione del tipo

$$\mathbf{u}_{h+1} = F(\mathbf{u}_h, h). \quad (15)$$

Dato  $\bar{\mathbf{u}} \in D$ , un sistema dinamico discreto definisce una successione per ricorsione data da

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{h+1} = F(\mathbf{u}_h, h) \\ \mathbf{u}_0 = \bar{\mathbf{u}}. \end{cases} \quad (16) \quad \star$$

**Osservazione 18.2.** Nel caso in cui  $F$  non dipenda da  $h$ , diremo che il sistema dinamico discreto è *autonomo*. Anche in questo caso, come in quello continuo, è possibile trasformare un sistema dinamico discreto generale in uno autonomo aggiungendo una variabile. Infatti, partiamo da (15) e definiamo il sistema dinamico discreto autonomo in  $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathbf{v}_{h+1} = G(\mathbf{v}_h) \quad \text{dove} \quad \mathbf{v} := (\mathbf{u}, y), \quad G(\mathbf{v}) := (F(\mathbf{v}), y + 1).$$

La successione definita da

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{h+1} = G(\mathbf{v}_h) \\ \mathbf{v}_0 = (\bar{\mathbf{u}}, 0) \end{cases}$$

è tale che per l'ultima componente si ha

$$\begin{cases} y_{h+1} = y_h + 1 \\ y_0 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_h = h \quad \forall h \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_h = (\mathbf{u}_h, h)$$

e dunque le prime  $n$  componenti danno la successione (16). ★

D'ora in poi quindi considereremo solo sistemi dinamici discreti autonomi.

Un concetto equivalente a quello di mappa iterata (autonoma) è il seguente:

**Definizione 18.3 (Semigruppato discreto).** Una famiglia numerabile di funzioni  $\{S_h\}_{h \in \mathbb{N}}$  da  $D$  a  $D$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice *semigruppato discreto* se verifica

$$(1) S_0 = \text{Id};$$

$$(2) S_{h+k} = S_h \circ S_k \text{ per ogni } h, k \in \mathbb{N}. \quad \star$$

**Proposizione 18.4.** Data una mappa iterata autonoma  $\mathbf{u}_{h+1} = F(\mathbf{u}_h)$  con condizione iniziale  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}$ , ponendo

$$\forall h \in \mathbb{N} : S_h \mathbf{u} := \mathbf{u}_h$$

si ottiene un semigruppato discreto.

Viceversa, dato un semigruppato discreto  $\{S_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ , ponendo

$$F := S_1, \quad \mathbf{u}_{h+1} = F(\mathbf{u}_h)$$

si ottiene la mappa iterata che dà il semigruppato.

*Dimostrazione.* La dimostrazione si basa sulla semplice osservazione che la soluzione del sistema dinamico discreto autonomo è data da

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{F}^h(\mathbf{u}) = \underbrace{(\mathbf{F} \circ \cdots \circ \mathbf{F})}_{h \text{ volte}}(\mathbf{u}),$$

mentre per un semigruppato discreto la seconda proprietà implica che

$$S_h = S_1^h = \underbrace{S_1 \circ \cdots \circ S_1}_{h \text{ volte}}.$$

Entrambe le proprietà si dimostrano per induzione. □

Quindi d'ora in poi i concetti di mappa iterata e di semigruppato discreto verranno identificati.

**Esempio 18.5.** Si consideri il sistema dinamico discreto in  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x_{h+1} = y_h \\ y_{h+1} = x_h + y_h. \end{cases} \quad (17)$$

Con la condizione iniziale  $(x_0, y_0) = (0, 1)$  si verifica che  $(x_h)$  è la successione dei numeri di Fibonacci. Per determinare il semigruppato discreto associato, visto che il sistema è lineare abbiamo che

$$\mathbf{F}(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi dobbiamo calcolare  $\mathbf{F}^h = A^h$ . Gli autovalori e autovettori di  $A$  sono

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

e diagonalizzando si ha

$$A^h = P \begin{bmatrix} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^h & 0 \\ 0 & \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^h \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{dove} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}. \quad \star$$

**Definizione 18.6 (Punto di equilibrio).** Un *punto di equilibrio* per un sistema dinamico discreto è un elemento  $\bar{\mathbf{u}} \in D$  tale che la successione generata da (16) è costante:

$$\mathbf{u}_h = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}. \quad \star$$

**Proposizione 18.7.** Un punto  $\bar{\mathbf{u}} \in D$  è di equilibrio per  $\mathbf{u}_{h+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$  se e solo se  $\bar{\mathbf{u}}$  è un punto fisso per  $\mathbf{F}$ , cioè

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}}) = \bar{\mathbf{u}}.$$

*Dimostrazione.* Se  $\bar{u} \in D$  è punto di equilibrio, allora

$$\bar{u} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{u}_0) = \mathbf{F}(\bar{u}).$$

Il viceversa si dimostra per induzione. □

**Definizione 18.8 (Orbita periodica).** Dato un sistema dinamico discreto  $\mathbf{u}_{h+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$ , l'*orbita uscente* da  $\mathbf{u}_0$  è l'insieme

$$\{\mathbf{F}^h(\mathbf{u}_0) : h \in \mathbb{N}\} \subseteq D.$$

Un'*orbita periodica* o *ciclo* è un'orbita

$$\{\mathbf{u}_0, \mathbf{F}(\mathbf{u}_0), \mathbf{F}^2(\mathbf{u}_0), \dots, \mathbf{F}^{p-1}(\mathbf{u}_0)\}$$

tale che  $\mathbf{F}^p(\mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0$ . Se tutti gli elementi del ciclo sono distinti, si dice che il ciclo ha periodo  $p$  e si parla di  $p$ -ciclo. ★

Si noti che il singoletto fatto da un punto di equilibrio è un ciclo (degenere) di periodo 1.

Si verifica facilmente che

**Proposizione 18.9.** *Ogni punto di un  $p$ -ciclo è un punto fisso di  $\mathbf{F}^p$ . Viceversa, ogni punto fisso di  $\mathbf{F}^p$  ha un'orbita periodica di periodo che divide  $p$ .*

Anche per i sistemi dinamici discreti si possono dare le definizioni di equilibrio stabile ed equilibrio asintoticamente stabile.

**Definizione 18.10.** Un punto di equilibrio  $\bar{u}$  del sistema dinamico discreto  $\mathbf{u}_{h+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$  si dice *stabile* se per ogni intorno  $V$  di  $\bar{u}$  esiste un intorno  $U$  di  $\bar{u}$  tale che per ogni  $\mathbf{u}_0 \in U$  si abbia

$$\mathbf{F}^h(\mathbf{u}_0) \in V \quad \text{per ogni } h \in \mathbb{N}.$$

L'equilibrio si dice *instabile* se non è stabile.

Si dice che un punto di equilibrio  $\bar{u}$  è *asintoticamente stabile* se è stabile e se inoltre per ogni  $\mathbf{u}_0 \in U$  si ha

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \mathbf{F}^h(\mathbf{u}_0) = \bar{u}. \quad \star$$

Vogliamo ora dare un criterio di stabilità per i sistemi dinamici discreti. Richiamiamo un teorema importante.

**Teorema 18.11 (Teorema delle contrazioni).** *Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme chiuso e  $\mathbf{F} : C \rightarrow C$  tale che*

$$\exists \delta < 1 : \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C : \quad |\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})| \leq \delta |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

(ovvero  $\mathbf{F}$  è lipschitziana di costante minore di 1). Allora il sistema dinamico discreto

$$\mathbf{u}_{h+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$$

ammette un unico punto di equilibrio in  $C$ , che inoltre è asintoticamente stabile e attrae tutto  $C$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{u}_0 \in C$  e definiamo  $\mathbf{u}_h := \mathbf{F}^h(\mathbf{u}_0)$ . Allora per ogni  $h, k \in \mathbb{N}$  si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}_{h+k} - \mathbf{u}_h| &\leq |\mathbf{u}_{h+k} - \mathbf{u}_{h+k-1}| + \cdots + |\mathbf{u}_{h+1} - \mathbf{u}_h| \\ &\leq (\delta^{h+k-1} + \delta^{h+k-2} + \cdots + \delta^h) |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0| \leq \frac{\delta^h}{1-\delta} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0| \end{aligned}$$

quindi la successione  $(\mathbf{u}_h)$  è di Cauchy in  $C$  (che è uno spazio metrico completo) e dunque converge a un certo  $\mathbf{u}$ . Ma poiché  $\mathbf{F}$  è continua, si ha che

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{u})$$

e dunque  $\mathbf{u}$  è punto di equilibrio.

Se  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  sono due punti fissi, si ha

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = |\mathbf{F}(\mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{v})| \leq \delta |\mathbf{u} - \mathbf{v}|.$$

Poiché  $\delta < 1$ , segue subito che  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ .

Infine, passando al limite per  $k \rightarrow \infty$  nella disuguaglianza sopra, si ottiene

$$|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}| \leq \frac{\delta^h}{1-\delta} |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0|$$

da cui  $\mathbf{u}_h \rightarrow \mathbf{u}$  che quindi è asintoticamente stabile e attrae tutto  $C$ . □

Risulta molto utile soprattutto il seguente corollario, che è quasi una caratterizzazione dei punti di equilibrio asintoticamente stabili.

**Corollario 18.12.** *Se esiste un chiuso  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $p \geq 1$  tale che  $\mathbf{F}^p : C \rightarrow C$  è una contrazione, allora di nuovo il sistema dinamico discreto*

$$\mathbf{u}_{h+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$$

*ammette un unico punto di equilibrio, che inoltre è asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* Dal Teorema delle contrazioni si ha che esiste un unico punto fisso  $\mathbf{u}$  per  $\mathbf{F}^p$ :

$$\mathbf{F}^p(\mathbf{u}) = \mathbf{u}.$$

Ma allora anche  $\mathbf{F}(\mathbf{u})$  è punto fisso per  $\mathbf{F}^p$ , infatti

$$\mathbf{F}^p(\mathbf{F}(\mathbf{u})) = \mathbf{F}^{1+p}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{F}^p(\mathbf{u})) = \mathbf{F}(\mathbf{u}).$$

Per l'unicità dunque si ha  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ . In particolare,  $\mathbf{u}$  è punto fisso per  $\mathbf{F}$ . La stabilità asintotica può essere provata in modo simile. □

**Definizione 18.13 (Raggio spettrale).** Data una matrice quadrata  $A$  con autovalori (complessi)  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ , chiamiamo *raggio spettrale* di  $A$  il numero

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_k|\}.$$

Chiamiamo *norma spettrale* di  $A$  la norma

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{|A\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \sup_{|\mathbf{x}|=1} |A\mathbf{x}|$$

dove  $|\lambda_j|$  denota il modulo complesso. ★

Si ha ovviamente che  $\|A\|$  è il più piccolo numero positivo tale che

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad |A\mathbf{x}| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\|.$$

Inoltre si può dimostrare che  $\|A\| = \sqrt{\rho(A^T A)}$  e vale il seguente lemma, che diamo senza dimostrazione.

**Lemma 18.14 (Lemma di Gelfand).** *Per ogni matrice quadrata  $A$  si ha che  $\rho(A) < 1$  se e solo se esiste  $k \geq 1$  tale che  $A^k$  è una contrazione.<sup>(12)</sup>*

Ora possiamo enunciare e dimostrare il seguente importante teorema per i sistemi dinamici discreti lineari.

**Teorema 18.15.** *Data una matrice quadrata  $A$ , consideriamo il sistema dinamico discreto lineare*

$$\mathbf{u}_{h+1} = A\mathbf{u}_h.$$

*Se  $\rho(A) < 1$ , allora  $\mathbf{0}$  è l'unico punto di equilibrio ed è asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* Poiché  $\rho(A) < 1$ , dal lemma precedente si ha che  $A^k$  è una contrazione per qualche  $k \geq 1$ . Applicando il Corollario 18.12 si ottiene la tesi.  $\square$

Si può anche dimostrare che se  $\rho(A) > 1$ , allora possono esserci più punti di equilibrio ma sono tutti instabili.

Chiudiamo la sezione con il teorema più importante:

**Teorema 18.16.** *Sia  $\bar{\mathbf{u}}$  un punto di equilibrio per il sistema dinamico discreto  $\mathbf{u}_{h+1} = \mathbf{F}(\mathbf{u}_h)$ . Se  $\rho(\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}})) < 1$ , allora  $\bar{\mathbf{u}}$  è asintoticamente stabile.*

*Dimostrazione.* Dalla formula di Gelfand esiste  $k \geq 1$  tale che  $\|\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}})^k\| < 1$ . Ma poiché  $\bar{\mathbf{u}}$  è un punto fisso per  $\mathbf{F}$ , segue che

$$\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{u}})^k = \nabla(\mathbf{F}^k)(\bar{\mathbf{u}}),$$

quindi  $\|\nabla(\mathbf{F}^k)(\bar{\mathbf{u}})\| < 1$ .

Ora sviluppiamo la funzione  $\mathbf{F}^k$  secondo Taylor attorno a  $\bar{\mathbf{u}}$ :

$$\mathbf{F}^k(\mathbf{u}) = \mathbf{F}^k(\bar{\mathbf{u}}) + \nabla(\mathbf{F}^k)(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) + R(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}});$$

quindi per differenza esiste un intorno  $U$  di  $\bar{\mathbf{u}}$  tale che

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in U : \quad \mathbf{F}^k(\mathbf{u}) - \mathbf{F}^k(\mathbf{v}) = \nabla(\mathbf{F}^k)(\bar{\mathbf{u}})(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \tilde{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

dove  $\tilde{R}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := R(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) - R(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{u}})$  è una funzione piccola in  $U$ . Quindi  $\mathbf{F}^k$  è una contrazione su  $U$  e dal Corollario 18.12 segue la tesi.  $\square$

**Osservazione 18.17.** Diventa importante trovare un criterio per stabilire se  $\rho(A) < 1$ , ovvero se gli autovalori complessi di una matrice stanno tutti nel cerchio unitario aperto oppure no. Senza risolvere il polinomio caratteristico, si può applicare il *criterio di Jury* (anche detto *di Schur-Cohn*), che funziona in modo molto simile alla tabella di Routh per la stabilità nei sistemi continui.

<sup>(12)</sup>La formula di Gelfand dice più precisamente che  $\rho(A) = \lim_h \|A^h\|^{1/h}$ .

Nel caso  $n = 2$ , si può dimostrare che la condizione  $\rho(A) < 1$  equivale a

$$|\operatorname{tr} A| < 1 + \det A < 2$$

(si provi a dimostrarlo usando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado e distinguendo i casi di soluzioni reali o soluzioni complesse coniugate).

Nel caso  $n = 3$ , scrivendo il polinomio caratteristico come  $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ , si mostra che la condizione di stabilità equivale alle disuguaglianze

$$|a_1 + a_3| < 1 + a_2, \quad |a_2 - a_1a_3| < 1 - a_3^2.$$

C'è anche un altro modo, un po' più laborioso, per procurarsi un criterio di stabilità, ed è quello di ricondursi al criterio di Routh-Hurwitz o a quello di Liénard-Chipart per le ODE. È possibile infatti dimostrare che la trasformazione involutoria sui complessi

$$z = \frac{w+1}{w-1}, \quad w = \frac{z+1}{z-1}$$

manda l'interno del cerchio di raggio unitario  $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$  nel semipiano sinistro  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w < 0\}$  (si veda [Ogata, pp. 191-192]). Quindi si può applicare la trasformazione al polinomio caratteristico in  $w$  del sistema discreto, moltiplicando poi tutto per  $(z-1)^n$  e ottenendo così un altro polinomio, a cui si possono applicare i criteri di stabilità delle ODE. Tale metodo però risulta in genere più lungo della diretta applicazione del criterio di Schur-Cohn. ★

Si può dare, in modo ovvio, anche la definizione di stabilità asintotica di un  $p$ -ciclo. In questo caso vale il seguente corollario.

**Corollario 18.18 (Stabilità di un  $p$ -ciclo).** *Un  $p$ -ciclo  $\{u_0, \dots, u_{p-1}\}$  è asintoticamente stabile se*

$$\rho(\nabla F(u_{p-1})\nabla F(u_{p-2}) \cdots \nabla F(u_0)) < 1. \quad (13)$$

**Esercizio 18.19 (Mathematical Monthly Challenge).** Siano  $x_1, x_2$  numeri reali positivi arbitrariamente scelti, con  $x_1 + x_2 \neq 0$ . Consideriamo la successione così definita:

$$x_{n+2} = \frac{2}{x_n + x_{n+1}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dimostrate che la successione converge (a che cosa?).

## 19 Mappe iterate unidimensionali

### 19.1 Il metodo della ragnatela

Sia  $x_{h+1} = F(x_h)$  un sistema dinamico discreto unidimensionale; esiste un metodo grafico semplice ma potente per capire dove vanno a finire le condizioni iniziali:

<sup>(13)</sup>Si noti che l'insieme degli autovalori, e quindi il raggio spettrale, di un prodotto di matrici non cambiano se si effettua una permutazione *ciclica* del prodotto. Quindi si può calcolare il prodotto dei gradienti a partire da un qualsiasi elemento del ciclo e andando all'indietro sul ciclo.

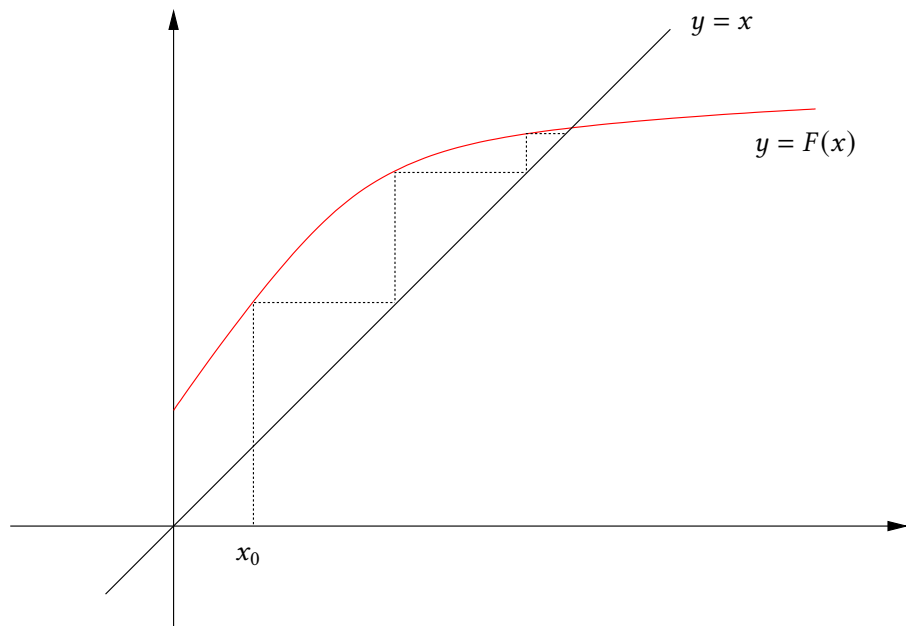


Figura 20: Da questa figura si capisce che a partire dalla posizione  $x_0$  si andrà a convergere verso una certa posizione, che è data dall'intersezione del grafico di  $f$  con la bisettrice, ovvero da un punto di equilibrio.

- si disegna la funzione  $F(x)$ ;
- si traccia la bisettrice del I-III quadrante  $y = x$ ;
- si parte sull'asse  $x$  dalla condizione iniziale  $x_0$ , muovendosi poi *in verticale* fino al grafico di  $F$  e *in orizzontale* fino alla bisettrice;
- si continua così per un po' di volte, cercando di capire cosa succede alla traiettoria.

Ogni volta che si interseca il grafico di  $F$ , si ottiene il valore della successione al passo successivo, quindi ci si può fare un'idea, anche se informale, su cosa succede alla successione all'aumentare di  $h$ . Si vedano le Figure 20 e 21.

## 19.2 Stabilità per sistemi discreti unidimensionali

Sia  $x_{h+1} = F(x_h)$  un sistema dinamico discreto unidimensionale con  $F$  di classe  $C^1$  e  $\bar{x} \in \mathbb{R}$  punto di equilibrio. Usando il metodo della ragnatela, si può dimostrare che

$$\begin{aligned} |F'(\bar{x})| < 1 &\Rightarrow \bar{x} \text{ è asintoticamente stabile} \\ |F'(\bar{x})| > 1 &\Rightarrow \bar{x} \text{ è instabile.} \end{aligned}$$

**Definizione 19.1 (Punti e cicli iperbolici).** I punti di equilibrio in cui  $|F'(\bar{x})| \neq 1$  vengono detti *punti iperbolici*. Allo stesso modo, i  $p$ -cicli per cui  $|(F^p)'(\bar{x})| \neq 1$  vengono detti *cicli iperbolici*. ★

Se un equilibrio non è iperbolico, si hanno i seguenti casi:

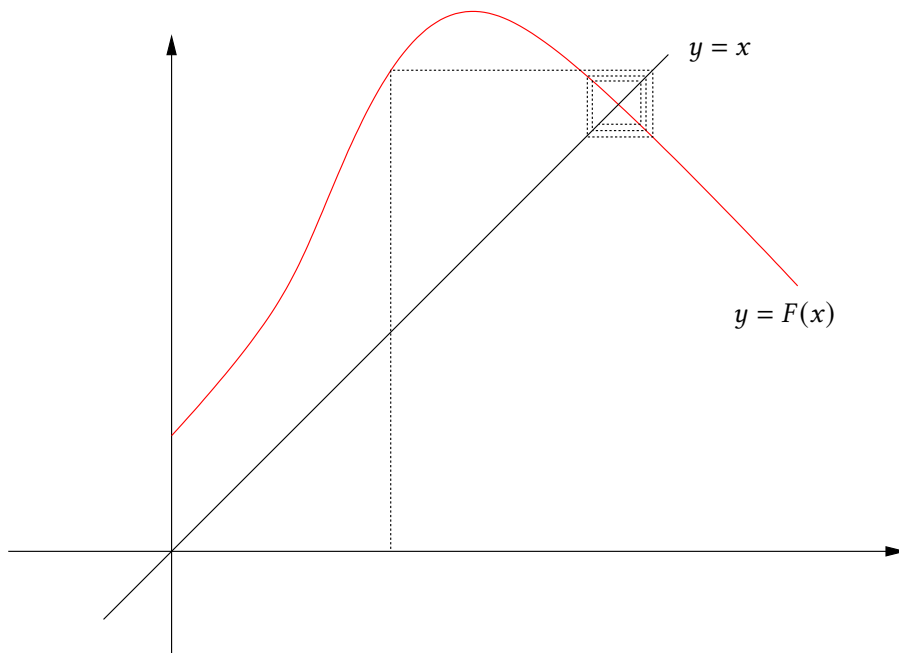


Figura 21: Da questa figura non è ben chiaro dove vada a finire la posizione iniziale  $x_0$ . Ci si avvicina un po' a un punto fisso, ma sembra che si tenda verso un "quadrato" (ovvero un 2-ciclo).

(1) se  $F'(\bar{x}) = 1$  e  $F$  è di classe  $C^2$  con  $F''(\bar{x}) \neq 0$ , allora  $\bar{x}$  è instabile;

(2) se  $F'(\bar{x}) = 1$  e  $F$  è di classe  $C^3$  con  $F''(\bar{x}) = 0$ , allora si ha

$$F'''(\bar{x}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$F'''(\bar{x}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ è instabile.}$$

(3) se  $F'(\bar{x}) = -1$  e  $F$  è di classe  $C^3$ , allora

$$2F'''(\bar{x}) + 3F''(\bar{x})^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$2F'''(\bar{x}) + 3F''(\bar{x})^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ è instabile.}$$

I casi (1) e (2) si dimostrano con la ragnatela, mentre per mostrare (3) si usa un curioso criterio: se  $F'(\bar{x}) = -1$ , allora  $\bar{x}$  è asintoticamente stabile per  $F$  se e solo se lo è per  $F^2$ . A questo punto, nel caso  $F \in C^3$  si usa il punto precedente, studiando il segno di  $(F^2)'''(\bar{x})$ .

Si noti che nel caso  $F'(\bar{x}) = -1$  la quantità  $2F'''(\bar{x}) + 3F''(\bar{x})^2$  ha il segno opposto alla *derivata schwarziana* di  $F$  in  $\bar{x}$ , definita da:

$$\frac{F'''(\bar{x})}{F'(\bar{x})} - \frac{3}{2} \left( \frac{F''(\bar{x})}{F'(\bar{x})} \right)^2.$$

Nel caso  $F'(\bar{x}) = 1$ , una condizione sufficiente per la stabilità asintotica che non richiede ulteriore regolarità è la seguente:

$$(F(x) - x)(x - \bar{x}) < 0 \quad \text{per } x \neq \bar{x} \text{ in un intorno di } \bar{x}. \quad (18)$$

Si veda la Figura 22.

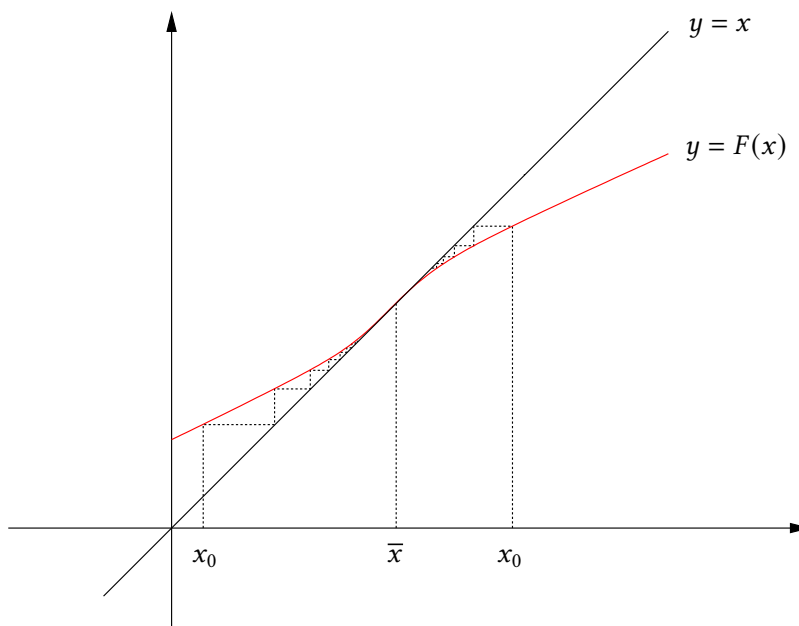


Figura 22: Il caso  $F(\bar{x}) = 1$  con  $(F(x) - x)(x - \bar{x}) < 0$ .

**Esempio 19.2.** Si può verificare che l'origine è:

- instabile di tipo sorgente per la mappa  $F(x) = x + x^3$ ;
- instabile di tipo sella per la mappa  $F(x) = x + x^2$ ;
- stabile asintoticamente per la mappa  $F(x) = x - x^3$ .

Si noti che in nessun caso l'origine è un punto iperbolico. ★

### 19.3 Alcuni esempi di mappe iterate unidimensionali

**Esempio 19.3 (La mappa a tenda).** Sia  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  data da

$$\begin{cases} F(x) = 2x & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ F(x) = 2 - 2x & \text{per } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

ovvero  $F(x) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|$ .

Allora il sistema dinamico  $x_{h+1} = F(x_h)$  ha due punti di equilibrio: 0 e  $2/3$ , entrambi instabili. Inoltre il grafico delle iterate  $F^h$  è facile da disegnare e si vede che ogni  $F^h$  ha esattamente  $2^h$  intersezioni con la bisettrice. Da ciò ne segue che la mappa a tenda ammette cicli di ogni ordine (e sono tutti instabili).<sup>(14)</sup>

<sup>(14)</sup>È facile vedere che, se  $p$  è un numero primo, il numero di  $p$ -cicli della mappa a tenda è  $(2^p - 2)/p$ . Più in generale, per

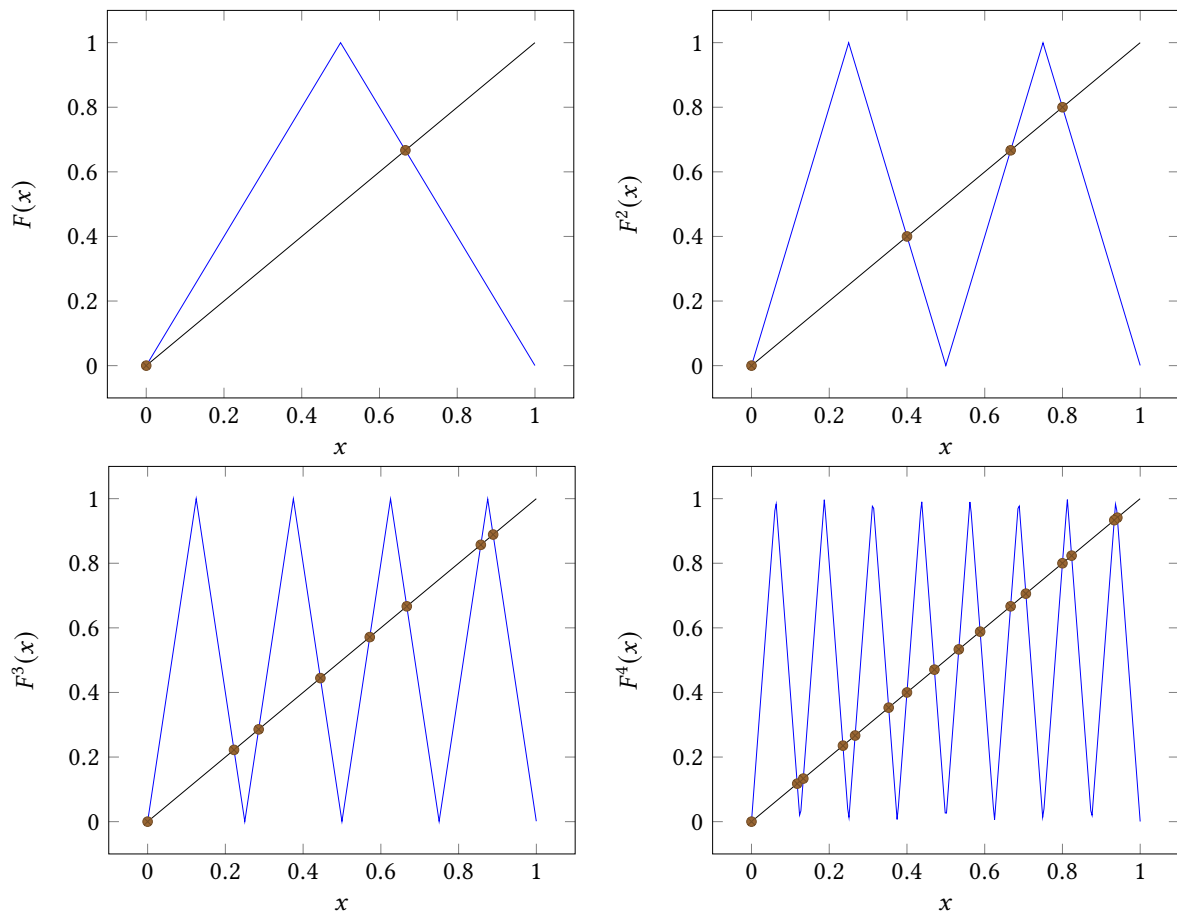


Figura 23: I grafici di alcune iterate della mappa a tenda.



## 20 La mappa logistica discreta

Partiamo da un modello discreto di dinamica delle popolazioni di tipo logistico

$$\frac{x_{h+1}}{x_h} = f(x_h),$$

dove  $f(x)$  è lineare, decrescente e soddisfa  $f(0) = a > 1$  e  $f(K) = 1$  ( $K$  quindi è la capacità ottimale del sistema). Si ha

$$f(x) = a - \frac{a-1}{K}x$$

e ne risulta il modello

$$x_{h+1} = ax_h - \frac{a-1}{K}x_h^2,$$

che descrive l'andamento di una popolazione mediante un modello discreto.

Supponiamo ora di normalizzare le variabili mediante un coefficiente  $M$ , che rappresenta la capacità massima del sistema: introduciamo

$$\tilde{x} := \frac{x}{M}, \quad \tilde{K} := \frac{K}{M},$$

in modo che  $0 \leq \tilde{x} \leq 1$  e  $0 < \tilde{K} < 1$ . Allora l'equazione diventa

$$\tilde{x}_{h+1} = a\tilde{x}_h - \frac{a-1}{\tilde{K}}\tilde{x}_h^2 = a\tilde{x}_h - b\tilde{x}_h^2$$

che può essere studiato al variare delle costanti. Un caso matematicamente interessante è quello per cui  $\tilde{K} = \frac{a-1}{a}$ , che porta ad avere  $b = a$  e quindi all'equazione discreta

$$\tilde{x}_{h+1} = a\tilde{x}_h(1 - \tilde{x}_h), \quad 1 < a \leq 4.$$

Notiamo che non ha senso supporre  $a > 4$ , poiché si arriverebbe a un valore negativo per la popolazione. Il caso in cui  $a = 4$  corrisponde a  $\tilde{K} = \frac{3}{4}$ .

Rinominando per comodità le variabili, chiamiamo *mappa logistica discreta* il sistema dinamico dato da  $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

$$F(x) = ax(1-x) \quad \text{con } 1 < a \leq 4.$$

Si verifica subito che ci sono due posizioni di equilibrio: la posizione  $x_1 = 0$  è di equilibrio instabile, mentre  $x_2 = 1 - \frac{1}{a}$  è stabile per  $1 < a < 3$ .

Per  $a = 3$ , la posizione  $x_2 = 2/3$  è ancora stabile (si provi a verificare con le derivate successive), ma per  $a > 3$  diventa instabile. In questo caso nasce un 2-ciclo, infatti:

$$F^2(x) = a^2x(1-x)(1-ax(1-x)) = a^2x(1-x)(1-ax+ax^2).$$

Ponendo  $F^2(x) = x$  ed eliminando le soluzioni già note  $x = 0$  e  $x = 1 - \frac{1}{a}$ , si trova

$$a^2x^2 - a(a+1)x + a + 1 = 0,$$

da cui si hanno le soluzioni nuove

$$x_{3,4} = \frac{1+a \pm \sqrt{(a-3)(a+1)}}{2a}$$

che esistono per  $a > 3$ . Inoltre si ha

$$F'(x_3)F'(x_4) = a^2(1 - 2x_3)(1 - 2x_4) = a^2(1 - 2(x_3 + x_4) + 4x_3x_4) = -a^2 + 2a + 4,$$

quindi il 2-ciclo è stabile per  $3 < a < 1 + \sqrt{6} \sim 3,45$ .

Continuando così, si trova una successione crescente  $(a_k)$ , i cui primi valori sono  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$ ,  $a_3 = 1 + \sqrt{6}$ , tale che

per  $a_k < a < a_{k+1}$  c'è un  $2^{k-1}$ -ciclo asintoticamente stabile.

Il fenomeno prende il nome di *raddoppio del periodo*. Tale successione è limitata e converge:

$$\lim_k a_k = a^* \simeq 3,56994.$$

Oltre tale valore, la mappa logistica può assumere un comportamento caotico. Inoltre, sempre numericamente si trova che

$$\lim_k \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k} = k^* \simeq 4,669$$

e la costante  $k^*$  è detta *costante di Feigenbaum*.

## 20.1 Il caso $a = 4$

Studiamo ora nel dettaglio il caso  $a = 4$ , in cui la mappa logistica è caotica:

$$x_{h+1} = 4x_h(1 - x_h).$$

Le soluzioni si possono scrivere in forma esplicita come

$$x_h = \sin^2(2^h \arcsin \sqrt{x_0}), \quad (19)$$

infatti, usando la formula di duplicazione del seno:

$$\begin{aligned} x_{h+1} &= \sin^2(2^{h+1} \arcsin \sqrt{x_0}) = \left(2 \sin(2^h \arcsin \sqrt{x_0}) \cos(2^h \arcsin \sqrt{x_0})\right)^2 \\ &= 4 \sin^2(2^h \arcsin \sqrt{x_0}) (1 - \sin^2(2^h \arcsin \sqrt{x_0})) = 4x_h(1 - x_h). \end{aligned}$$

Tracciando i grafici delle iterate di  $F$ , è facile vedere che c'è un comportamento simile a quello della mappa a tenda, per cui esistono cicli di qualsiasi ordine (si veda la Figura 24). In particolare, anche il numero di  $n$ -cicli della mappa logistica discreta con  $a = 4$  è dato dalla formula nella nota a pagina 71.

Mostriamo ora che tale mappa ammette un ciclo di ordine 3. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$f^3(x) = x, \quad f(x) = 4x(1 - x),$$

che è di grado 8, nell'intervallo  $[0; 1]$ . Una volta ridotta eliminando le due soluzioni banali  $x = 0$  e  $x = 3/4$ , e fattorizzando il polinomio rimanente, troviamo

$$(64x^3 - 112x^2 + 56x - 7)(64x^3 - 96x^2 + 36x - 3) = 0,$$

quindi dobbiamo risolvere due equazioni di terzo grado. Purtroppo la soluzione esplicita di tali equazioni è difficile, anche se numericamente si vede che ognuna delle due cubiche si annulla tre volte sull'intervallo  $(0; 1)$ . Procediamo allora in altro modo: usando la (19), dobbiamo risolvere l'equazione

$$x_3 = x_0 \quad \Rightarrow \quad \sin(8 \arcsin \sqrt{x_0}) = \pm \sqrt{x_0}$$

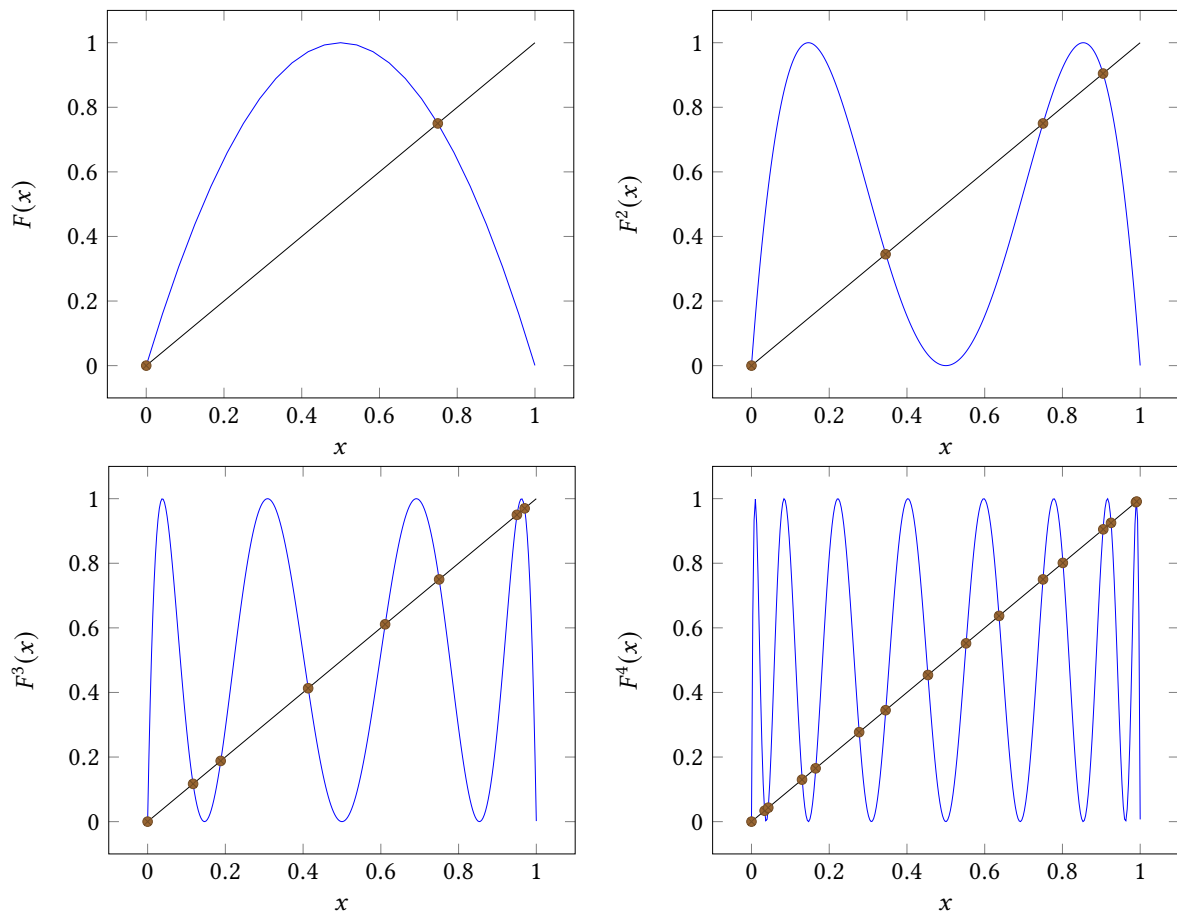


Figura 24: I grafici di alcune iterate della mappa logistica per  $a = 4$ .

escludendo le soluzioni  $x_0 = 0$  e  $x_0 = 3/4$ , da cui abbiamo

$$8 \arcsin \sqrt{x_0} = \pm \arcsin \sqrt{x_0} + 2k\pi, \quad 8 \arcsin \sqrt{x_0} = \pi \mp \arcsin \sqrt{x_0} + 2k\pi.$$

Dalla prima segue

$$\arcsin \sqrt{x_0} = \frac{2}{7}k\pi \Rightarrow x_0 = \sin^2 \frac{2}{7}k\pi$$

e anche

$$\arcsin \sqrt{x_0} = \frac{2}{9}k\pi \Rightarrow x_0 = \sin^2 \frac{2}{9}k\pi.$$

Dalla seconda

$$\arcsin \sqrt{x_0} = \frac{2k+1}{9}\pi \Rightarrow x_0 = \sin^2 \frac{2k+1}{9}\pi$$

e anche

$$\arcsin \sqrt{x_0} = \frac{2k+1}{7}\pi \Rightarrow x_0 = \sin^2 \frac{2k+1}{7}\pi.$$

Da tutte queste equazioni si trovano le due famiglie di soluzioni non banali

$$\left\{ \sin^2 \frac{\pi}{7}, \sin^2 \frac{2}{7}\pi, \sin^2 \frac{3}{7}\pi \right\}, \quad \left\{ \sin^2 \frac{\pi}{9}, \sin^2 \frac{2}{9}\pi, \sin^2 \frac{4}{9}\pi \right\}.$$

Quindi abbiamo trovato due 3-cicli. Verifichiamo il primo:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sin^2 \frac{\pi}{7} \\ x_1 &= 4 \sin^2 \frac{\pi}{7} \left( 1 - \sin^2 \frac{\pi}{7} \right) = \left( 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \right)^2 = \sin^2 \frac{2}{7}\pi \\ x_2 &= 4 \sin^2 \frac{2}{7}\pi \left( 1 - \sin^2 \frac{2}{7}\pi \right) = \sin^2 \frac{4}{7}\pi = \sin^2 \frac{3}{7}\pi \\ x_3 &= 4 \sin^2 \frac{3}{7}\pi \left( 1 - \sin^2 \frac{3}{7}\pi \right) = \sin^2 \frac{6}{7}\pi = \sin^2 \frac{\pi}{7} = x_0. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo trovato il 3-ciclo

$$\sin^2 \frac{\pi}{7} \rightarrow \sin^2 \frac{2}{7}\pi \rightarrow \sin^2 \frac{3}{7}\pi \rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{7}.$$

Allo stesso modo si verifica che l'altro 3-ciclo è dato da

$$\sin^2 \frac{\pi}{9} \rightarrow \sin^2 \frac{2}{9}\pi \rightarrow \sin^2 \frac{4}{9}\pi \rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{9}.$$

## 21 Il Teorema di Sharkovsky

Questa sezione è stata presa da [Tosi]. Sia  $I$  un intervallo in  $\mathbb{R}$  (che può anche essere illimitato) e fissiamo una funzione continua  $F : I \rightarrow I$ .

Il teorema di Sharkovsky prevede l'utilizzo del seguente ordinamento dell'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali, che è noto come *ordinamento di Sharkovsky*:

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft 11 \triangleleft \dots \triangleleft 3 \cdot 2 \triangleleft 5 \cdot 2 \triangleleft \dots \triangleleft 3 \cdot 2^2 \triangleleft 5 \cdot 2^2 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1.$$

La relazione  $a \triangleleft b$  significa che  $a$  precede  $b$  nell'ordinamento. I primi puntini sottintendono tutti i numeri dispari in ordine crescente, poi i dispari per potenze basse di 2, poi i dispari per potenze sempre più alte di 2, poi le potenze di 2 in ordine decrescente. Ad esempio  $9 \cdot 2^3 \triangleleft 7 \cdot 2^4$ .

Ogni numero naturale  $n$  può essere scritto in modo unico nella forma  $n = 2^k(2m+1)$ . L'ordinamento di Sharkovsky dei numeri naturali si ottiene in questo modo: dati  $a = 2^{k_a}(2m_a+1)$  e  $b = 2^{k_b}(2m_b+1)$ , allora  $a \triangleleft b$  se e solo se vale una delle seguenti:

- $m_a = m_b = 0$  e  $k_a > k_b$ ;
- $m_b = 0$  e  $m_a \neq 0$ ;
- $m_a, m_b \neq 0$  e  $k_a < k_b$ ;
- $m_a, m_b \neq 0, k_a = k_b$  e  $m_a < m_b$ .

Ogni numero naturale compare esattamente una ed una sola volta nell'ordinamento di Sharkovsky che quindi è un *ordinamento totale*. L'ordinamento di Sharkovsky individua per quali numeri interi  $p$  la mappa iterata  $F$  ammette un  $p$ -ciclo:

**Teorema 21.1 (Primo teorema di Sharkovsky).** *Se  $p$  è un periodo per  $F$  e  $p \triangleleft q$ , allora anche  $q$  è un periodo per  $F$ .*

Questo teorema, noto anche come *Sharkovsky Forcing Theorem*, dimostra che un insieme di periodi per una mappa continua definita su un intervallo è una *coda* dell'ordinamento di Sharkovsky, ovvero un insieme  $T$  della forma  $T = \{t \in \mathbb{N} : s \triangleleft t\}$  per qualche  $s \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 21.2 (Secondo teorema di Sharkovsky).** *Per ogni coda  $T$  dell'ordinamento di Sharkovsky esiste una mappa continua  $F : I \rightarrow I$  che ammette tutti e soli gli elementi di  $T$  come periodi.*

Il secondo risultato è noto come *Sharkovsky Realization Theorem* ed è una sorta di inverso del primo. Entrambi i teoremi sono stati dimostrati nel lavoro (in russo)

A.N. Sharkovsky, *Co-existence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself*, Ukrainian Mathematical Journal, 16, n.1, 1964.

Non daremo la loro dimostrazione che, anche se elementare, è abbastanza articolata. È interessante osservare come il primo elemento dell'ordinamento sia 3; questo significa che, se una mappa continua ammette un 3-ciclo, allora essa ammette un  $p$ -ciclo per ogni  $p \geq 1$ .

## 22 Definizioni di caos

Diamo una definizione di *sistema caotico*, dovuta a [Devaney], nel caso di mappe iterate unidimensionali.

**Definizione 22.1.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo limitato e  $f : I \rightarrow I$  una funzione continua. Il sistema dinamico discreto  $x_{h+1} = f(x_h)$  è *caotico secondo Devaney* se

- (1) i *punti periodici* di  $f$ , cioè i punti fissi di qualche iterata  $f^k$ , sono densi in  $I$ ;

(2)  $f$  è transitiva su  $I$ , cioè

$$\forall x, y \in I, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists z \in I, |x - z| < \varepsilon, \exists h \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad |f^h(z) - y| < \varepsilon;$$

(3)  $f$  ha una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali, cioè

$$\exists \beta > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists y \in I, |x - y| < \varepsilon, \exists h \in \mathbb{N} : |f^h(x) - f^h(y)| > \beta. \quad \star$$

Si può dimostrare che la mappa a tenda e la mappa logistica nel caso  $a = 4$  sono mappe caotiche secondo Devaney. Anche lo shift di Bernoulli, opportunamente reinterpretato come mappa continua (ad esempio su una circonferenza), è associato a una mappa continua e risulta caotico secondo Devaney.

È interessante notare come, tra le tre proprietà che caratterizzano il caos secondo Devaney, la terza sia quella più classicamente associata all'imprevedibilità di un sistema, ovvero la dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Eppure nel 1992 nel breve lavoro Banks, Brooks, Cairns, Davis & Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 99 No. 4, gli autori hanno dimostrato in maniera elementare che la terza condizione è una conseguenza delle prime due!

Un'altra definizione di caos, in generale un po' più debole, era stata proposta precedentemente nel 1975 in Li & Yorke, *Period Three Implies Chaos*, The American Mathematical Monthly, Vol. 82 No. 10.

**Definizione 22.2.** Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo limitato e  $f : I \rightarrow I$  una funzione continua. Il sistema dinamico discreto  $x_{h+1} = f(x_h)$  è caotico secondo Li-Yorke se

(1) esistono orbite periodiche di qualsiasi periodo;

(2) esiste un insieme non numerabile  $S \subset I$ , non contenente punti periodici, tale che

- per ogni  $x, y \in S, x \neq y$ ,

$$\limsup_h |f^h(x) - f^h(y)| > 0, \quad \liminf_h |f^h(x) - f^h(y)| = 0;$$

- per ogni  $x \in S$  e per ogni punto periodico  $z \in I$ ,

$$\limsup_h |f^h(x) - f^h(z)| > 0. \quad \star$$

In quel lavoro, Li e Yorke hanno dimostrato che, se esiste un punto  $x_0$  tale che

$$x_3 \leq x_0 < x_1 < x_2 \quad \text{oppure} \quad x_3 \geq x_0 > x_1 > x_2, \quad x_h = f^h(x_0),$$

allora  $f$  è caotica nel senso della definizione sopra. In particolare, se  $f$  ha un ciclo di ordine 3 allora è caotica secondo Li-Yorke, da cui il titolo del loro articolo.

## Riferimenti bibliografici

[Devaney] R.L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems. Theory and Experiment. Second Edition*, CRC Press, 2020

- [Gantmacher] F. Gantmacher, *Lezioni di Meccanica Analitica*, Editori Riuniti, 1980
- [HS] M. Hirsch, S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- [Ogata] K. Ogata, *Discrete-time Control Systems, Second Edition*, Prentice-Hall International, 1995.
- [Perko] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems. Third Edition*, Springer, New York, 2001.
- [Tosi] Luisa Tosi, *Il teorema di Sharkovsky*, Tesi di laurea, Università Cattolica del Sacro Cuore, 2011.