

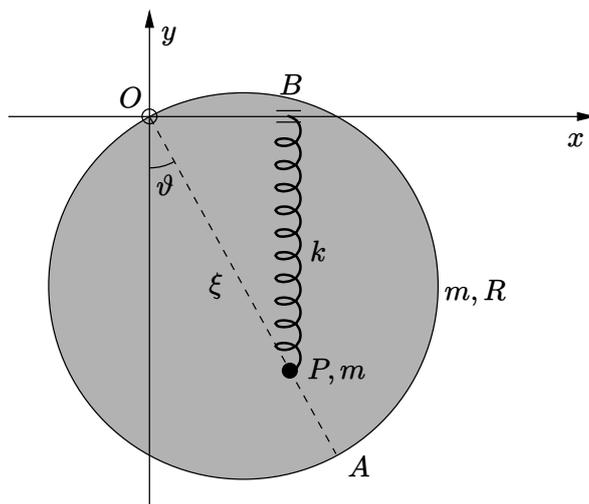
UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE  
**Prova scritta di Meccanica Analitica - 6 giugno 2025**

I) In un piano verticale, una lamina circolare di massa  $m$  e diametro  $OA = 2R$  è libera di ruotare attorno al suo punto  $O$ , fissato nell'origine di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ . Sul diametro  $OA$  della lamina scorre un punto materiale  $P$  di massa  $m$ , senza uscire dal segmento  $OA$ .

Su tutto il sistema agisce la forza peso e sul punto  $P$  agisce una forza elastica di coefficiente  $k > 0$  e polo il punto  $B$  sull'asse delle ascisse posto in verticale rispetto a  $P$ .

Supposti i vincoli lisci e posto  $\lambda = \frac{mg}{kR}$ , si chiede di:

1. trovare le posizioni di equilibrio ordinarie del sistema e discuterne la stabilità;
2. trovare le posizioni di equilibrio di confine;
3. scrivere l'energia cinetica del sistema;
4. scrivere la lagrangiana linearizzata attorno ad una posizione di equilibrio stabile.



II) Determinare per quali valori di  $\alpha > 0$  la trasformazione

$$\begin{cases} Q(q, p) = \sqrt{\alpha p} \sin q \\ P(q, p) = \sqrt{p} \cos q \end{cases}$$

è canonica e trovarne una funzione generatrice del tipo  $F_2(q, P)$ .