

# DMFsfida 2024

## Istruzioni Generali

- La gara dura 90 minuti.
- Si ricorda di scegliere il jolly nei primi 10 minuti. I chiarimenti sul testo vanno chiesti dal capitano nei primi 20 minuti.
- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000. Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera, cioè il resto della divisione con  $10^4$ ; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142, \quad \sqrt{3} = 1,7321, \quad \sqrt{5} = 2,2360, \quad \pi = 3,1415.$$

## Gara di via Garzetta, 19 aprile 2024

**Quesito 1.** La nota marca MathTaste, che produce succhi, specifica che i suoi prodotti contengono il 24% di concentrato ed il resto è acqua. Avendo una bottiglia di succo MathTaste da un litro e mezzo, quanti ml di succo dobbiamo sostituire con del concentrato affinché quest'ultimo sia presente al 30%?

**Quesito 2.** Abbiamo raccolto una tonnellata di angurie. Un'anguria, si sa, è quasi tutta acqua: per la precisione, il 99% della massa di un'anguria è acqua. Purtroppo il caldo eccezionale le ha rinsecchite e oggi le stesse angurie contengono solo il 98% d'acqua. Qual è la massa attuale (in kg) delle angurie?

**Quesito 3.** Qual è il massimo intero positivo  $k$  che divide  $\frac{n!}{(n-6)!}$  per ogni  $n > 6$ ?

**Quesito 4.** Siano  $x, y, z$  dei numeri reali positivi tali che  $x + y + z = 16$ . Qual è il valore massimo che può assumere  $xy^2z$ ?

**Quesito 5.** Giochiamo a poker con 28 carte, numerate da 1 a 7 per ciascuno dei quattro semi. Riceviamo cinque carte; qual è la probabilità di avere un full servito (cioè tre carte di un valore e due di un altro)? *Si dia come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

**Quesito 6.** Quanto vale il seguente integrale?

$$\int_0^{+\infty} \frac{2024}{\pi(x+1)\sqrt{x^2+2x}} dx$$

**Quesito 7.** Il prof. Musoni si diverte a costruire semicirconferenze inscritte. Oggi ne ha costruita una inscritta in un triangolo rettangolo di cateti lunghi 1000 e 1500 cm, in modo che il diametro stia sull'ipotenusa e i cateti siano tangenti alla semicirconferenza. Quanto misura in cm il suo raggio?

**Quesito 8.** Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quanto vale la traccia di  $4A^3 - 16A^2 - 12A + 121I_3$ ? *Denotiamo con  $I_3$  la matrice identica di ordine 3.*

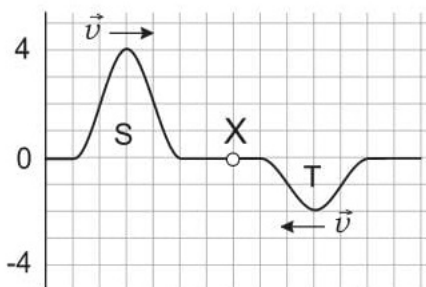
**Quesito 9.** Tra tutti i triangoli di base  $AB = 2$  ed altezza 1, qual è il massimo valore del rapporto  $\frac{AC}{BC}$ ? *Si dia il risultato moltiplicato per 1000.*

**Quesito 10.** Siano  $a, b, c$  interi positivi minori di 2024 tali che

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + c\sqrt{b}}.$$

Quanti valori distinti può assumere  $c$ ?

**Quesito 11.** Due impulsi trasversali viaggiano con la stessa velocità  $v$  e in verso opposto lungo una corda. La figura mostra un'istantanea all'istante  $t_0$ . Assumendo che la velocità sia di 1 quadretto al secondo. Quanti quadretti vale lo spostamento del punto  $X$  dopo 3 secondi? Si dia la risposta moltiplicata per 1000.



**Quesito 12.** Il prof. Tamanini usa dei mattoncini per costruire infiniti grattacieli giocattolo (in tempo finito!) a forma di parallelepipedo. Il primo è un parallelepipedo di dimensioni 1, 5 e 9, il secondo 2, 6 e 10, il terzo 3, 7 e 11 e così via in modo che ogni parallelepipedo abbia le dimensioni che superano di 1 le dimensioni del precedente. Quanto vale la somma  $S$  dei reciproci dei volumi di tutti i grattacieli? Dare come risposta la parte intera di  $10^5 S$ .

**Quesito 13.** Un pezzo d'angolo di un puzzle è costruito a partire da un cartoncino  $ABCD$  rettangolare di lati 72 mm e  $(36\sqrt{3} - 12)$  mm da cui si sono ritagliati dei pezzi seguenti i contorni di due cerchi di raggio 12 mm con centri  $O$  e  $O'$ ; i due centri sono situati rispettivamente sulle congiungenti dei punti medi di  $AB$  e  $CD$ , e di  $BC$  e  $DA$  e distano  $6\sqrt{3}$  mm da  $AB$  e  $BC$ , rispettivamente. Il pezzo del puzzle è danneggiato da un taglio eseguito esattamente sul segmento  $OO'$ . Il pezzo del puzzle è così diviso in due parti. L'area, in  $\text{mm}^2$  del pezzo più grande si può scrivere come  $a\sqrt{3} + b + c\pi$  per certi  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Indicare come risultato  $a + b + c$ .

**Quesito 14.** Il nuovo soprammobile della prof.ssa Pagani è formato da una sfera contenente al suo interno cinque sfere più piccole. Quattro di esse hanno lo stesso raggio e sono tutte tangenti tra loro e anche tangenti alla sfera esterna. La quinta sfera è posta tra le quattro sfere ed è tangente a ciascuna di loro. Il rapporto tra il raggio della sfera più piccola e quello della sfera più grande (quella che le contiene tutte) si può scrivere come  $\frac{x-2}{x+2}$ , per un certo  $x \in \mathbb{R}$ . Quanto vale  $x^2$ ?

**Quesito 15.** Una futura matricola ha appena scoperto che se due numeri si possono scrivere come somma di quadrati di interi positivi, anche il loro prodotto ha la stessa proprietà. Ora sta provando a scrivere in tutti i modi possibili il numero 2405 come somma di due quadrati  $a^2 + b^2$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $a < b$ . Quanto fa la somma di tutti gli  $a, b$  trovati?

**Quesito 16.** L'esponente di un gruppo  $G$ , denotato con  $\exp(G)$ , è il minimo intero positivo  $m$  tale che  $x^m = 1$  per ogni elemento  $x$  del gruppo. Si calcoli

$$\sum_{n=4}^{2024} \frac{\exp(\text{Sym}(n))}{\exp(\text{Alt}(n))}.$$

Si ricorda che  $\text{Sym}(n)$  è il gruppo simmetrico su  $n$  elementi, cioè il gruppo delle permutazioni su  $n$  elementi. Si ricorda altresì che  $\text{Alt}(n)$  è il sottogruppo delle permutazioni pari.