Allenamento di matematica
Simulazione di gara

Brescia - 13 gennaio 2017

Le risposte vanno indicate con una sequenza di 4 cifre; se la risposta contenesse più di 4 cifre, andranno indicate solo le ultime 4. Se la risposta contenesse meno di 4 cifre è necessario anteporre la cifra 0 quante volte occorre.

1. **Caramelle binarie.** La mattina di Santa Lucia, il piccolo Alan Turing trova sul pavimento di casa sua una sequenza di 25 caramelle, alcune gialle e alcune rosse, che lo guidano verso il soggiorno dove lo attendono i suoi regali. Alan legge in quella sequenza un numero scritto in codice binario (rosso=0, giallo=1) ed ottiene il seguente

   $$N = 1010011101101010110000110.$$

   Dopo una attenta analisi il ragazzo esclama. *Che coincidenza! Il numero di regali che ho ricevuto coincide con la quarta cifra da sinistra di N scritto in base sedici!* Quanti sono i regali ricevuti da Alan? [0013]

2. **Dolce di pan di zucchero.** Tra i regali ricevuti da Alan vi è un particolare dolce di pan di zucchero. Esso consiste in un ottaedro di spigolo l a cui sono state tagliate delle piramidi a base quadrata in corrispondenza di tutti i vertici. I tagli sono stati fatti in modo tale che all'interno vi possa essere una nocciola sferica tangente a tutte le 14 facce del poliedro. L'intercapedine tra il solido e la nocciola sferica è stata quindi riempita di caffè. Alan guarda attentamente il dolce e afferma: *il lato dell'ottaedro di partenza era evidentemente di cm*

   $$l = \frac{6}{\sqrt[3]{60\sqrt{6} - 90\sqrt{2} - 2\pi\sqrt{6}}}.$$

   Quanti millilitri di caffè sono contenuti nel dolce? [0004]

3. **L'influenza informatica.** Il computer di Enrico è stato da poco infettato da un virus che cancella, un po' alla volta, tutta la memoria. Ogni minuto che passa la regione cancellata viene quadruplicata e ulteriormente aumentata di 1 byte. Enrico "congela" il computer quando ormai la situazione è compromessa: egli calcola che non solo il virus tra un minuto avrebbe corrotto tutta la memoria, ma anzi ormai basterebbe triplicare la regione cancellata e aumentarla di 1 byte per esaurire esattamente la memoria del computer, che ammonta a 2,5 gigabyte = $2,5 \cdot 2^{30}$ byte. Quanto era grande la regione cancellata 14 minuti fa (in byte)? [0003]

4. **La memoria di Lucia.** Lucia ha un diario segreto, chiuso con un lucchetto che si apre soltanto con una combinazione di 4 cifre. Lucia non ricorda a memoria la sequenza di numeri, ma sa che il codice è uguale al valore assoluto della somma delle soluzioni della seguente equazione

   $$(x + 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 31)^2 = 100.$$

   Puoi aiutare Lucia ad aprire il suo diario? [0512]

5. **Mi piace.** Mariolina invita i visitatori del suo blog a dare i loro suggerimenti e ad esprimere con un voto il gradimento del sito. La media attuale dei voti dei visitatori è visibile sul sito. Giuliano, cui piace molto il sito della sua amica, decide di dare come voto la media visibile sul sito più 1. In seguito al voto di Giuliano, la media dei voti del sito aumenta di 0,02 punti. Quanti visitatori hanno votato prima di Giuliano? [0049]

6. **Matusalemme.** In un bosco sperduto lontano migliaia di chilometri, vivono degli alberi imponenti e robusti, che resistono allo scorrere del tempo. Al centro di quella foresta si innalza un meraviglioso

esemplare, il più anziano di tutti. Volete sapere quanti anni ha? Scrivete la somma del numeratore e del denominatore, quando essi saranno ridotti ai minimi termini, del risultato della seguente espressione:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2001^2}\right).$$

[3002]

7. **Il gioco di Eulero.** A Leonardo Eulero (1707-1783) si deve il seguente problema: "Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ognuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro (cioè con quanti luigi) si sedette a giocare il primo gentiluomo". [0039]

8. **Birbo il folletto goloso.** Birbo è uno dei folletti più anziani al servizio di Babbo Natale ed è il responsabile di una delle numerose fabbriche in cui avviene la produzione di cioccolatini destinati ai bambini. Birbo, tuttavia, è un folletto molto goloso e mangia, con la scusa di assaggiarli, moltissimi cioccolatini. Dall'inizio dell'anno ne ha già mangiati ben 2014. Babbo Natale è un po' preoccupato per questo e decide di aiutare il suo piccolo aiutante. Per distogliere il pensiero dai cioccolatini, Babbo Natale gli affida alcuni calcoli da eseguire. Il primo tra questi consiste nel calcolare la somma di tutte le permutazioni possibili del numero 1024, anche quelle in cui lo 0 compare come primo numero a sinistra. Quale numero otterrà Birbo? (Scrivere le prime quattro cifre da sinistra del risultato). [4666]

9. **Santa Lucia e i folletti meritevoli.** La mattina del 13 Dicembre, dopo aver consegnato i regali a tutti i bambini, Santa Lucia fa rientro alla propria casa, che si trova proprio di fianco alla fabbrica di giocattoli. Proprio mentre entra dal cancello, ecco arrivare quattro piccoli folletti che si offrono di aiutarla. Dopo averla aiutata a scendere dal proprio carretto, portano l'asinello nella stalla e gli preparano un'abbondante dose di fieno. Santa Lucia si ricorda di avere 12 praline al cioccolato fondente incartate ciascuna con una carta rossa tinta unita e decide di regalarle ai folletti. In quanti modi possibili può suddividere i 12 cioccolatini tra i 4 folletti? [0455]

10. **Folletti geometri.** I folletti di Babbo Natale, durante le pause dalla preparazione dei giocattoli, si divertono nel cortile della loro fabbrica con un gioco di abilità. Sul pavimento hanno tracciato un parallelogramma in cui l'angolo maggiore è ampio $120°$, mentre i due lati misurano rispettivamente $a = 3\,\mathrm{m}$ e $b = 2\,\mathrm{m}$. Dopo aver tracciato la bisettrice di ciascuno dei quattro angoli interni del poligono, osservano che i loro punti di intersezione formano un rettangolo interno al parallelogramma. In seguito, dopo essersi messi ad una buona distanza, lanciano una monetina verso il parallelogramma. Supponendo che la monetina cada all'interno della superficie delimitata dal parallelogramma, qual è la probabilità che la monetina cada all'interno del rettangolo formato dai punti di intersezione tra le bisettrici? (Scrivere il denominatore della frazione ridotta ai minimi termini). [0012]

11. **Verso Capodanno.** Si avvicina il 2017. Quale mai sarà la cifra delle unità di 2017^{2017}? [0007]

12. **Un cubo cavo di un cubo cavo di un cubo.** Giulio Ascoli e l'amico Cesare Arzelà hanno ricevuto per Santa Lucia 27 cubetti di lato $1\,cm$. Giulio dispone subito i cubetti così da formare un cubo $3 \times 3 \times 3$. Non contento, Cesare toglie dalla costruzione un cubetto da un vertice del cubo e tutti gli altri aventi in comune con esso uno spigolo o una faccia e poi esclama "Ora sono soddisfatto! Ehi Giulio, ma che area superficiale avrà mai tale oggetto?" [0054]

13. **Confezioni enigmatiche.** Santa Lucia non si limita a portare i regali in giro per il mondo, ma talvolta si diverte a costruire confezioni stravaganti. I matematici più sagaci per aprire la loro confezione devono trovare una combinazione. Niccolò Tartaglia sta provando a risolvere il suo indovinello:

    Se vuoi aprire la tua confezione regalo devi trovare un numero di 4 *cifre che verifichi almeno tre delle seguenti condizioni:*

    1. *n non è una potenza di* 9*,*

2. n è divisibile per 11 *e l'affermazione precedente è falsa,*

3. n è una potenza di 3,

4. La somma delle cifre di n è 18,

5. n è divisibile per i due gemelli 71 *e* 73.

6. n è un primo palindromo con un numero pari di cifre.

[2187]

14. **La predizione.** Gli aiutanti di Santa Lucia sono appassionati di numeri, in particolare della successione di Fibonacci. Costruiscono una sequenza di 10 numeri in questo modo: iniziano scrivendo due numeri interi qualsiasi, poi al terzo posto collocano la somma di questi due, al quarto la somma tra il secondo e il terzo, e così via. Ora chiedono a Santa Lucia di trovare la somma di tutti i numeri della sequenza, ma le possono mostrare solo un numero della sequenza a sua scelta. La santa ci pensa un po' e chiede di conoscere il numero in settima posizione, ricevendo come risposta 789. A questo punto trova subito la soluzione al quesito dei suoi aiutanti. Qual è la somma dei numeri della sequenza costruita dai suoi aiutanti? [8679]

15. **Un problema di linea occupata.** Un gruppo di bambini sono convinti di poter trovare il numero di telefono di Santa Lucia. Sanno soltanto che è un numero formato da 7 cifre. Durante i loro numerosi tentativi, scoprono un fatto interessante. Prendendo il reciproco di un qualunque numero di 7 cifre, aggiungendo 1 e elevando il numero ottenuto alla potenza del numero di 7 cifre di partenza, si ottiene un numero decimale che comincia sempre con le stesse quattro cifre. Quali sono queste cifre? (Dare come risposta le prime quattro cifre, trascurando la virgola). [2718]

16. **Un po' di analisi diofantea.** Trovare quante sono le soluzioni intere dell'equazione:

$$3x^2 - 4y - 2x + xy - 8 = 0.$$

[0012]

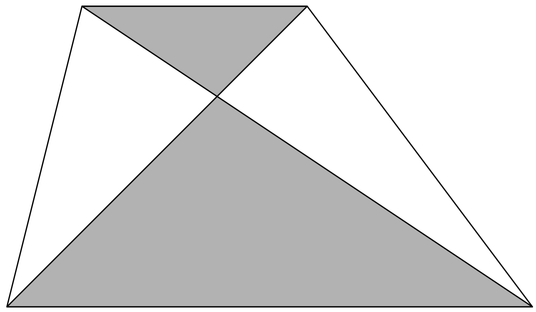
17. **Cena di Natale I.** Lorenzo ha ormai terminato anche l'ultima fetta di pandoro e ora deve trovare un modo per occupare il resto della serata. Sul tavolo davanti a lui ci sono 12 stuzzicadenti (tutti della stessa lunghezza l) e, dopo averci giochicchiato un pochino, si impegna a determinare quanti quadrati, tutti di lato l, sia possibile ottenere accostando in vari modi gli stuzzicadenti che ha a disposizione. Quanti quadrati può costruire al massimo Lorenzo? [0006]

18. **Cena di Natale II.** Anche Viola, la cuginetta di Lorenzo, ha terminato le leccornie natalizie e si aggira in cerca di un passatempo. Finalmente scorge la borsa della nonna, pittrice, piena di colori a tempera. Viola sceglie ben 5 colori differenti e recuperando dei vecchi piattini bianchi della nonna inizia ad adornarli disegnando, coi 5 colori che ha a disposizione, 6 fiorellini lungo il bordo di ogni piattino. Tuttavia, Viola non ama le simmetrie e produce solamente piattini adornati con minimo indice di simmetria, ovvero quei piattini che devono essere ruotati almeno 6 volte per riottenere la configurazione iniziale. Quanti piattini diversi con minimo indice di simmetria può creare Viola con i 5 colori della nonna? (due piattini sono da considerare uguali se opportunamente ruotati hanno la stessa disposizione dei colori). [2580]

19. **Cena di Natale III.** Anche Matteo, l'altro cugino di Lorenzo, si è dato da fare per occupare il tempo. Munito di carta e penna ha iniziato a disegnare quadrilateri ciclici (ovvero iscritti in una circonferenza). L'ultimo che ha disegnato ha i lati di lunghezza (in senso orario): 25,7,15,15. Scelto un punto interno al quadrilatero, quanto vale il minimo della somma delle sue distanze dai vertici del quadrilatero? [0044]

20. **Temperature nel bresciano.** Osservando le temperature del 2016 registrate a Brescia, Luca ha notato che nei due mesi di settembre e ottobre si è verificata una strana coincidenza: la temperatura minima è stata la somma tra la temperatura minima del giorno precedente e del giorno successivo. Sapendo che il 3 settembre la temperatura minima è stata di 8°C e l'1 novembre è stata di 11°C, determinare la temperatura minima del 25 settembre. [0003]

21. **Il trapezio.** In figura vedete un trapezio una parte del quale è stata tratteggiata. La base maggiore del trapezio è lunga 7 m mentre la base minore è lunga 3 m. Quale percentuale della superficie del trapezio è rimasta bianca?



[0042]

22. **Il problema del giardiniere.** Due radure, una quadrata e l'altra a forma di triangolo equilatero, hanno lo stesso perimetro. Devono essere circolari e il lavoro viene fatto estendendole il meno possibile. Qual è il rapporto tra l'area circolare più piccola e l'area circolare più grande? (Dare la somma tra numeratore e denominatore della frazione risultante ridotta ai minimi termini). [0059]