$\boxed{1}$ Sia data la funzione

$$f\left(x\right)=\frac{x}{x+1}.$$

Sia ora $f^{(n)}\left(x\right)=f\left(f\left(\ldots\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)$, cioè la f composta con se stessa n volte.

Calcolare $\dfrac{1}{f^{2012}\left(2013\right)}$ e nel risultato si indichino le prime quattro cifre decimali.

Svolgimento. Innanzitutto si dimostra per induzione che vale

$$f^{(n)}\left(x\right)=\frac{x}{nx+1}.$$

Se $n=1$ si ha banalmente $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x+1}$.

Ora supponiamola vera per n, dimostriamo che vale per $n+1$.

$$f\left(f^{(n)}\left(x\right)\right)=\frac{\frac{x}{nx+1}}{\frac{x}{nx+1}+1}=\frac{x}{\left(n+1\right)x+1}.$$

Quindi

$$\frac{1}{f^{(2012)}\left(2013\right)}=\frac{2013\cdot 2012}{2013}+\frac{1}{2013}$$

e basterà quindi calcolare le prime quattro cifre decimali di $\dfrac{1}{2013}$ che sono 0004. $\diamond$

[0004]

$\boxed{2}$ Sia $H(x)$ un polinomio a coefficienti interi. Sapendo che esistono j, k, l interi distinti tali che $H(j)=H(k)=H(l)=-5$ e che $H(1)=6$, qual è il valore massimo che può assumere la somma dei quadrati di j, k, l?

Svolgimento. Innanzitutto definiamo un polinomio $Q(x)$ nel seguente modo:

$$Q(x)=H(x)+5.$$

Non sapendo il grado di $Q(x)$ ma sapendo che ammette le tre radici j, k, l, possiamo decomporlo nel prodotto

$$Q(x)=(x-j)(x-k)(x-l)\cdot S(x),$$

con $S(x)$ polinomio di grado generico. Ora, ricavando $H(x)$, otteniamo

$$H(x)=(x-j)(x-k)(x-l)\cdot S(x)-5$$

e in particolare

$$H(1)=(1-j)(1-k)(1-l)\cdot S(1)-5=6$$

da cui possiamo ricavare

$$(1-j)(1-k)(1-l)\cdot S(1)=11.$$

Essendo 11 un numero primo e dovendo essere j, k e l distinti, sicuramente $S(1) \neq \pm 11$ e quindi le possibilità che abbiamo, a meno di scambiare le radici, sono

$$1 - j = 1, \quad 1 - k = -1, \quad 1 - l = \pm 11.$$

Quidi otteniamo $j = 0$, $k = 2$ e $l = 12$ oppure $l = -10$ e dunque le terne di valori sono:

$$(0, 2, 12) \quad \text{e} \quad (0, 2, -10),$$

da cui si nota subito che il massimo valore della somma dei quadrati è data da $4 + 144 = 148$. ◇

[148]

$\boxed{3}$ Sia dato il polinomio

$$x^3 - 125x^2 + 5031x - 64395 = 0.$$

Trovare $a^2 + b^2 + c^2$ dove a, b e c sono le radici del polinomio.

Svolgimento. In un polinomio di terzo grado la somma S delle radici coincide con l'opposto del coefficiente del termine di secondo grado e quindi $S = a + b + c = 125$; il coefficiente del termine di primo grado è $Q = ab + bc + ca$ e quindi nel nostro caso $Q = 5031$; l'opposto del termine noto coincide con il prodotto delle radici $P = abc$ e quindi $P = 64395$ (anche se ai fini della risoluzione dell'esercizio questo dato non serve).
Quindi

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 5563.$$

[5563]