Brescia, 9 novembre 2012

Allenamenti di matematica
Teoria dei numeri e algebra modulare

1. Provare che per ogni naturale n si ha che $17 | (2^n 3^{2n} - 1)$.
2. Trovare le soluzioni intere dell'equazione $6x + 10y - 15z = 1$.
3. Dimostrare che un numero naturale n è un quadrato perfetto se e solo se ha un numero dispari di divisori.
4. Ci sono 50 prigionieri rinchiusi in 50 celle allineate. Con il ritorno del Re dalle Crociate viene concessa una parziale amnistia che funziona in questo modo: mentre i prigionieri stanno ancora dormendo la guardia cammina lungo le celle per 50 volte sempre procedendo da sinistra verso destra. Al primo passaggio gira la serratura in ogni cella, cosicché ogni cella è aperta; al secondo passaggio gira la serratura della seconda, quarta, sesta, ecc... cella, perciò queste sono di nuove chiuse. Al terzo passaggio gira la serratura della terza, sesta, ecc... cella, e così via. Quali celle saranno aperte alla fine lasciando così liberi i prigionieri?
5. Provare che l'equazione $x^2 - y^2 = 2$ non ha soluzioni intere.
6. Dimostrare che $n^2 + 3n + 5$ non è mai divisibile per 121 per qualunque naturale n.
7. Quando Alice avrà un anno di meno di quelli che avrà Barbara quando Alice avrà metà degli anni di quanti ne avrà Barbara quando Alice avrà il doppio dell'età che ha Barbara ora, Barbara avrà il triplo degli anni che aveva Alice quando Barbara aveva l'età che ha Alice ora. Quanti anni hanno Alice e Barbara? (Una delle due è una teen-ager).
8. Provare che 167 ~~non~~ è un numero primo (senza verificare a mano tutte le divisioni).
9. Determinare tutti gli interi positivi d tali che ogniqualvolta d divide un intero positivo n, si ha che d divide anche qualsiasi intero ottenuto permutando le cifre di n (si intende che i numeri sono scritti in base 10).
10. Trovare le soluzioni intere dell'equazione $x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$.
11. Il numero $739ABC$ è divisibile per 7,8 e 9. Che valori possono assumere A, B e C?
12. Determinare delle regole semplici di divisibilità per ciascuno dei seguenti numeri naturali: 4,5,6,8,9,10,11,12,15.
13. Mostrare che se esistono due interi x, y tali che $ax + by = 1$ allora $M.C.D.(a, b) = 1$.
14. Provare che per ogni intero n si ha che $6 | n(n-1)(2n-1)$.
15. Siano a, b, c tre numeri reali non nulli tali che
$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$
Dimostrare che $|abc| = 1$.
16. Trovare le soluzioni intere dell'equazione $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.
17. Trovare tutti i triangoli rettangoli con lati di lunghezza intera positiva e tali che l'area eguagli il perimetro.