

ESERCIZIO 10

5

$$x^2 + 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$$

$$x^2 + 2xy + 4xy + 8y^2 + 3(x + 2y) = 2$$

$$x(x + 2y) + 4y(x + 2y) + 3(x + 2y) = 2$$

$$(x + 2y)(x + 4y + 3) = 2$$

$2 \cdot 1 \quad (-2) \cdot (-1)$

Bisogna quindi risolvere i seguenti 4 sistemi:

$$\text{I : } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 4y + 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{II : } \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x + 4y + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{III : } \begin{cases} x + 2y = -1 \\ x + 4y + 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{IV : } \begin{cases} x + 2y = -2 \\ x + 4y + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 11

I numeri 7, 8 e 9 sono primi tra loro, infatti $\text{MCD}(7, 8, 9) = 1$

e quindi $\text{m.c.m.}(7, 8, 9) = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

Quindi perché il numero 739ABC sia divisibile per 7, 8 e 9, deve essere divisibile per 504.

Il più piccolo numero che possiamo avere è 739'000. Eseguendo la divisione per 504 si ottiene:

$$739'000 : 504 = 1466 \text{ con resto } 136.$$

calcolando

$$1466 \cdot 504 = 738'864$$

otteniamo un numero divisibile per 504, che però non ha le caratteristiche, in quanto minore di 739'000.

A questo però è facile trovare il numero

richiesto che sarà dato da:

$$738'864 + k \cdot 504, \text{ con } k \in \mathbb{N}.$$

Per $k=1$ si ha: $739'368$

Per $k=2$ si ha: $739'872$

Per $k=3$ si ha: $740'376$, che però non soddisfa le condizioni iniziali.

Quindi gli unici numeri che soddisfano le ipotesi sono $739'368$ e $739'872$.

ESERCIZIO 12

• DIVISIBILITÀ PER 4:

ogni numero naturale può essere scritto nella forma:

$$m = 100q + r$$

(perché 4 divide 100, ma non divide 10).

Quindi $4|m \Leftrightarrow 4|r$, dove r corrisponde alle ultime due cifre di m .

• DIVISIBILITÀ PER 5:

ogni numero naturale può essere scritto nella forma:

$$m = 10q + r$$

Poiché $5|10$, allora $5|m \Leftrightarrow 5|r$, dove r è l'ultima cifra di m . In altre parole $5|m$ se e solo se m finisce per 0 o 5.

• DIVISIBILITÀ PER 6:

Poiché $6 = \text{m.c.m.}(2, 3)$, allora per verificare la divisibilità per 6 bisogna verificare la divisibilità per 2 e 3.

• DIVISIBILITÀ PER 8:

Ogni numero naturale può essere scritto nella forma:

$$m = 1000q + r, \text{ dove } r \text{ è il resto della divisione per } 1000.$$

N.B. 8 non divide 100, ma $8|1000$.

Quindi $8|m \Leftrightarrow 8|r$, dove r corrisponde alle

7

ultime tre cifre di m .

• DIVISIBILITÀ PER 9:

Come per la divisibilità per 3, la rappresentazione decimale di m è:

$$m = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \dots + 10 a_1 + a_0.$$

Inoltre $10 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow 10^l \equiv 1 \pmod{9} \quad \forall l \in \mathbb{N}.$

Quindi $m \equiv a_k + a_{k-1} + \dots + a_1 + a_0 \pmod{9}$,
ovvero $9 \mid m \Leftrightarrow 9 \mid (a_k + a_{k-1} + \dots + a_0)$, cioè se 9 divide la somma delle cifre di m .

• DIVISIBILITÀ PER 10

Ovviamente tutti sanno che un numero è divisibile per 10 se la sua ultima cifra è 0. Questo proprio perché

$$10 = \text{m.c.m.}(2, 5).$$

quindi perché $10 \mid m$, deve essere $2 \mid m$ e $5 \mid m$.

Se $2 \mid m$, la sua ultima cifra deve essere 2, 4, 6, 8, 0.

Se $5 \mid m$, la sua ultima cifra deve essere 5 o 0.

Quindi perché valgano entrambe e $10 \mid m$, si deve avere per forza che l'ultima cifra di m è zero.

• DIVISIBILITÀ PER 11

Supponiamo che la rappresentazione decimale di m sia:

$$m = 10^k a_k + 10^{k-1} a_{k-1} + \dots + a_0.$$

Inoltre $10 \equiv -1 \pmod{11}$
 $10^l \equiv (-1)^l \pmod{11} \quad \forall l \in \mathbb{N}.$

Allora $m \equiv (-1)^k a_k + (-1)^{k-1} a_{k-1} + \dots - a_1 + a_0 \pmod{11}$

Quindi $11 \mid m \Leftrightarrow 11 \mid a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^k a_k,$

8

cioè $11 \mid m$ se e solo se 11 divide la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari.

• DIVISIBILITÀ PER 12 e 15

Poiché $12 = \text{m.c.m.}(4, 3)$ e $15 = \text{m.c.m.}(5, 3)$, basta verificare la divisibilità rispettivamente per 4 e 3 e per 5 e 3.

ESERCIZIO 13

Chiamiamo $d = \text{MCD}(a, b)$.

Allora $d \mid (ax + by)$, ma $ax + by = 1$.

Quindi $d \mid 1 \Rightarrow d = 1$.

ESERCIZIO 14

$2 \mid m$ o $2 \mid (m-1)$ e 2 non divide $(2m-1)$ perché è sempre dispari. Ma quindi $2 \mid m(m-1)(2m-1)$.

Presi 3 interi consecutivi $m-1, m, m+1$, 3 divi= sicuramente uno di questi numeri.

Se $3 \mid m$ o $3 \mid (m-1)$ siamo a posto.

Se $3 \mid (m+1)$ allora:

$$m+1 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$m \equiv -1 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow 2m-1 \equiv 2(-1)-1 \pmod{3} \\ \equiv -3 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Quindi se $3 \mid (m+1)$, allora $3 \mid (2m-1)$.

Poiché $6 = \text{m.c.m.}(2, 3)$, come visto nei criteri di divisibilità, basta verificare la divisibilità per 2 e 3.

$$\Rightarrow 6 \mid m(m-1)(2m-1).$$

ESERCIZIO 15

$$\underbrace{a + \frac{1}{b}}_{\textcircled{1}} = \underbrace{b + \frac{1}{c}}_{\textcircled{2}} = \underbrace{c + \frac{1}{a}}_{\textcircled{3}}$$

Combinando 1 e 2 si ottiene

$$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b - c}{bc}$$

Combinando 1 e 3 si ottiene

$$a - c = \frac{b - a}{ab}$$

Combinando 2 e 3 si ottiene

$$b - c = \frac{c - a}{ac}$$

Quindi si ha

$$(a - b)(a - c)(b - c) = \frac{(b - c)(b - a)(c - a)}{a^2 b^2 c^2}$$

$$\Leftrightarrow a^2 b^2 c^2 = 1, \text{ cioè } |abc| = 1.$$

ESERCIZIO 16

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2$$

Scomponiamo:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)(x + y)$$

Possiamo semplificare $(x + y)$ purché sia diverso da zero.

Se $x + y = 0$, allora $x = -y$ e le soluzioni dell'equazione sono tutte le coppie $(m, -m)$, con $m \in \mathbb{Z}$.

Se $x + y \neq 0$ otteniamo:

$$x^2 + y^2 - xy = x + y$$

$$x^2 + y^2 - xy - x - y = 0$$

$$10 \quad x^2 - x(y+1) + y^2 - y = 0$$

Questa equazione ammette soluzioni in x se e solo se

$$\begin{aligned} \Delta &= (y+1)^2 - 4(y^2 - y) \geq 0 \\ \Rightarrow \Delta &= y^2 + 1 + 2y - 4y^2 + 4y = \\ &= -3y^2 + 6y + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3y^2 - 6y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{12}}{3} \leq y \leq \frac{3 + \sqrt{12}}{3}$$

Poiché $y \in \mathbb{Z}$, gli unici valori che può assumere sono: $y = 0, 1, 2$.

Calcolando quindi $x_{1,2}$:

$$x_{1,2} = \frac{(y+1) \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2}$$

e sostituendo i valori di y otteniamo:

$$y = 0 \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm 1}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1, 0), (0, 0)$$

$$y = 1 \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2, 1), (0, 1)$$

$$y = 2 \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-12 + 12 + 1}}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2, 2), (1, 2)$$

ESERCIZIO 17

11

siano a, b, c i 3 lati del triangolo. Non è restrittivo supporre che l'ipotenusa sia

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Quindi la richiesta del problema diventa

$$\frac{ab}{2} = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$ab - 2a - 2b = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Eleviamo tutto al quadrato:

$$a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 - 4a^2b + 8ab - 4ab^2 = 4a^2 + 4b^2$$

$$a^2b^2 - 4ab(a+b) + 8ab = 0$$

Possiamo dividere per ab perché $ab \neq 0$:

$$ab - 4(a+b) + 8 = 0$$

$$a(b-4) - 4b + 8 = 0$$

Sommiamo $+8$ e raccogliamo:

$$a(b-4) - 4(b-4) = 8$$

$$(a-4)(b-4) = 8$$

A questo punto, poiché vogliamo soluzioni intere, basta risolvere i seguenti sistemi:

$$\bullet \begin{cases} a-4=8 \\ b-4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=5 \end{cases} \quad \text{da cui } c=13$$

$$\bullet \begin{cases} a-4=1 \\ b-4=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=12 \end{cases} \quad \text{da cui } c=13$$

$$\bullet \begin{cases} a-4=-8 \\ b-4=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=3 \end{cases} \quad \text{NON ACCETTABILE}$$

$$\bullet \begin{cases} a - 4 = -1 \\ b - 4 = -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \end{cases}$$

NON ACCETTABILE

$$\bullet \begin{cases} a - 4 = 2 \\ b - 4 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases}$$

da cui $c = 10$

$$\bullet \begin{cases} a - 4 = 4 \\ b - 4 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases}$$

da cui $c = 10$

$$\bullet \begin{cases} a - 4 = -2 \\ b - 4 = -4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \end{cases}$$

NON ACCETTABILE

$$\bullet \begin{cases} a - 4 = -4 \\ b - 4 = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

NON ACCETTABILE