

Allenamenti di matematica: Simulazione di Gara

22 febbraio 2013

Le risposte vanno indicate con una sequenza di 4 cifre; se la risposta contenesse più di 4 cifre, andranno indicate solo le ultime 4. Se la risposta contenesse meno di 4 cifre è necessario anteporre la cifra 0 quante volte occorre.

- Luci serali.** La facciata del Dipartimento di Matematica presenta 30 finestre, disposte come in una tabella 6×5 . Una sera Alfredo nota che vi sono 8 luci accese e che in ogni riga ed in ogni colonna le luci accese sono o due o nessuna. Determinare quante sono le configurazioni con 8 luci accese che rispettano tale criterio.
- Il pirata.** Un vecchio burbero entra in un negozio e compra rhum a €4,11 e gin a €3,97 la bottiglia. Quante bottiglie di gin compra, se spende in tutto €56?
- Trigonometria a parte.** Poniamo: $r = 37$ m, $a = \sqrt{373}$ m e $\sigma = 35^\circ$. Si consideri una circonferenza di centro O e raggio r . Si fissi uno dei suoi diametri e si nominino A e B i suoi estremi; si prenda poi, su OA , un punto C tale per cui si abbia $\overline{OC} = a$ e sia D il simmetrico di C rispetto al centro O . Si fissi poi un punto P sulla circonferenza in modo che si abbia $\widehat{PDB} = \sigma$. Si costruiscano due quadrati sui segmenti PC e PD e si fornisca come risultato la somma delle loro aree misurata in m^2 .
- L'archivio.** In un archivio sono presenti 9963 faldoni contenenti verifiche di matematica. Essi devono essere archiviati in scaffali numerati progressivamente, partendo da 1, in modo tale che la quantità di faldoni aumenti costantemente al crescere del numero degli scaffali. Sapendo che la somma del numero di faldoni negli scaffali di numero dispari è 5043, quale è il numero di scaffali necessari per l'archiviazione?
- Graduati.** Sia $f(x)$ un polinomio di grado 2013.
Qual è il massimo grado che può avere il polinomio $f(x-3) - f(x) - 3(f(x-2) - f(x-1))$?
- Iterando.** Sulla lavagna si trova inizialmente scritto un 1. Ad ogni passo Paolo deve sostituire tutti gli 1 con dei 2 e tutti i 2 con dei 21. Quale sarà la lunghezza della stringa di cifre dopo 19 iterazioni?
- ...Ma quante sono?** Sono dati in un piano quattro punti A, B, C, D in modo che ABC e ABD siano due triangoli equilateri distinti con $\overline{AB} = 4$. Determina tutte le circonferenze che godono della seguente proprietà: i quattro punti A, B, C e D hanno uguale distanza dalla circonferenza. Fornire come soluzione le 4 cifre più significative della somma dei raggi, utilizzando l'approssimazione $\sqrt{3} \approx 1,73$.
- Fogli volanti.** Nel corso della solita passeggiata mattutina, l'anziano matematico Lino recupera per strada un foglietto riguardante un problema algebrico. L'esercizio recita così:
"Siano $\lambda(k) = k^2 + 1$ e $\mu(k) = -312k^4 + 2496k^3 - 4056k^2 + 2496k - 3744$ due espressioni nel parametro reale k e sia
$$p_k(x) = \lambda(k)x^{100} + (k - 2013)x^{99} + \mu(k)x^{98} + x + 1$$
un polinomio nell'indeterminata x . Al variare di k , qual è il massimo valore che può assumere la somma $S(k)$ di tutti i possibili prodotti a due a due delle radici complesse di $p_k(x)$?"
Immediatamente Lino ricorda i momenti felici in cui lui e i suoi compagni partecipavano alle gare di matematica. Rientrato a casa, presa carta e penna, con ancora quell'entusiasmo di un tempo, Lino si cimenta nella risoluzione, portandola a compimento in pochi minuti. Quale valore ha trovato?
- Operazioni tipografiche.** Si prenda un numero di 4 cifre; scambiando la prima cifra con la seconda e poi la terza con la quarta si ottiene un numero che è quattro volte quello iniziale. Qual è il numero iniziale?
- Lo studente di notte.** Uno studente doveva lavorare su una serie di problemi di chimica e una serie di problemi di matematica, entrambi da consegnare la mattina successiva. Lavorando ai suoi problemi nella biblioteca di matematica, la probabilità di finire quelli di matematica entro la notte era del 95% e la probabilità di finire quelli di chimica entro la notte era del 75%.

Lavorando ai suoi problemi nella biblioteca di chimica, la probabilità di finire quelli di matematica entro la notte era dell'80% e la probabilità di finire quelli di chimica entro la notte era del 90%. Dal momento che non ha bicicletta, poteva lavorare in una sola delle biblioteche quella notte. La probabilità che scegliesse la biblioteca di matematica era del 60%.

Dato che è riuscito a concludere i problemi di entrambe le materie, qual è la probabilità che abbia lavorato ai suoi problemi nella biblioteca di matematica? Rispondere con le prime 4 cifre decimali.

11. **Il triangolo e la circonferenza.** Si consideri un triangolo inscritto in una circonferenza. L'angolo in A misura 60° , il lato CB 31 cm, il lato AB supera il lato AC di 11 cm. Trovare perimetro del triangolo e raggio della circonferenza in cm. Esprimere il risultato sommandoli, utilizzando l'approssimazione $\sqrt{3} \approx 1,73$. Scrivere le tre cifre della parte intera e come quarta cifra la prima decimale.
12. **Le caramelle di Ada.** Ada e le sue 3 amiche si spartiscono equamente 12 caramelle: 5 gialle, 4 rosse e 3 verdi. A turno pescano casualmente da un sacchettino 3 caramelle ciascuna. Sapendo che Ada pesca per ultima, determinare la probabilità che Ada peschi esattamente una caramella per ogni colore. Scrivere come risultato le prime 4 cifre decimali del valore ottenuto.
13. **Facendo ordine.** Alessandra deve sistemare per ordine della mamma le sue scarpe. Non conosce le misure dei lati delle scatole delle scarpe, però sa che la somma dell'altezza con 4 volte la somma della lunghezza più il quadruplo della larghezza, fa 444 mm. Calcolare il massimo volume di ciascuna scatola espresso in cm^3 (si prendano fino a 2 cifre dopo la virgola).
14. **Il campionato di cricket.** Sta per iniziare il Super Campionato Mondiale di cricket. Svolgendosi solo ogni 10 anni vi parteciperanno moltissime squadre. Ogni squadra affronterà ciascuna altra squadra esattamente 2 volte: una volta in casa e una volta fuori casa. Si è calcolato che in questa edizione si disputeranno complessivamente 10920 partite. Quante squadre parteciperanno alla competizione?
15. **Un processo infinito.** È assegnato un triangolo equilatero di area pari a $2014\sqrt{3}/\pi \text{ cm}^2$. Si inscriba in esso una circonferenza, e si colori il cerchio relativo. Si traccino i segmenti che congiungono i vertici del triangolo con l'incentro, individuando i tre punti di intersezione con la circonferenza inscritta. Da essi si traccino le tangenti alla medesima: queste ripartiscono il triangolo in un esagono regolare e tre triangoli equilateri congruenti. A questo punto si ripeta su ciascuno di questi ultimi quanto fatto sul triangolo equilatero iniziale, andando così a colorare altre tre cerchi (ovviamente congruenti). Nell'ipotesi di iterare all'infinito tale processo, si fornisca come risultato l'area, espressa in cm^2 , della parte colorata.
16. **Una...** Qual è la cifra delle unità di $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 1996^2$?
17. **...e molte.** Quante cifre ha il numero 123456789^6 ?
18. **La pizzata.** Ad una cena partecipano 41 persone tra cui ci sono uomini, donne e bambini. Al termine della serata il conto è di €120. Sapendo che ogni uomo paga €12, ogni donna €9 e ogni bambino €1, calcolare quanti bambini hanno preso parte alla cena.
19. **Agli albori dell'origami.** Dato un foglio rettangolare di lati 60 cm e 30 cm, determinare l'area (in cm^2) del triangolo che risulta dalla sovrapposizione dei due lembi che si ottengono piegando il foglio lungo una diagonale. Indicare le prime quattro cifre significative del risultato arrotondato alla quarta cifra significativa.
20. **In aeroporto.** Cinque valigie, ognuna contrassegnata dal nome del legittimo proprietario, stanno girando sul nastro trasportatore dell'aeroporto di Malpensa. I cinque viaggiatori sono molto di fretta e prendono le valigie casualmente (ogni viaggiatore prende una valigia), senza badare al nome sull'etichetta. Qual è la probabilità che ogni viaggiatore si ritrovi con la valigia sbagliata? Rispondere indicando le prime 4 cifre decimali.
21. **Numismatica.** Bob svuota il salvadanaio sul tavolo.
 "Ci sono 56 monete qui, tutte da 1, 5 e 10 centesimi. Sai quanto c'è in totale?"
 "Sì, ci sono 3 centesimi in meno di 1 euro" risponde Betty.
 Quante monete da 1 centesimo ci sono nel salvadanaio?
22. **Zeri che valgono.** Qual è la posizione, nella notazione in base 10, della prima cifra diversa da 0 del numero $1000!$, considerando la cifra delle unità in posizione 1.