Allenamenti Disfida Matematica

11 Gennaio 2013

Polinomi, disuguaglianze e induzione.

$\boxed{1}$ Qual è la massima area di un rettangolo avente perimetro uguale a 576?
[Suggerimento: utilizzare le medie e le loro disuguaglianze.]

Svolgimento. Prendiamo in considerazione il rettangolo di lati a e b. Fissare il perimetro è equivalente a fissare la somma $a+b=288$. Chiamando A l'area del rettangolo si ha

$$A = ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 20736,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza tra GM e AM.
Il valore massimo per l'area è raggiunto quando $a=b$ e quindi quando il rettangolo è un quadrato. Quindi $a=b=\sqrt{20736}=144$. Avendo trovato dei valori particolari per a e b per cui l'area è massima, allora il valore massimo per l'area è proprio 20736. $\diamond$

[20736]

$\boxed{2}$ Qual è la massima area di un triangolo rettangolo con ipotenusa uguale a 136?

Svolgimento. Siano a e b le lunghezze dei cateti. Per il teorema di Pitagora $a^2+b^2 = 136^2 = 18496$. Scrivendo dunque la disuguaglianza $GM \leqslant QM$, otteniamo

$$\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{18496}{2}}$$

e quindi

$$ab \leqslant \frac{18496}{2} = 9248.$$

Detta A l'area del triangolo

$$A = \frac{ab}{2} \leqslant \frac{9248}{2} = 4624.$$

Per poter affermare che 4624 è l'area massima bisogna anche mostrare un esempio in cui tale valore venga effettivamente assunto. Per poterlo fare utilizziamo il fatto che l'uguaglianza

$$GM \geqslant QM$$

si ha se e solo se $a = b$: in questo caso $a = b = 68\sqrt{2}$. Quindi l'area è proprio 4624. $\diamond$

[4624]

$\boxed{3}$ Sia $P(x)$ un polinomio di grado n, con n pari, e avente n radici reali positive e tali che $P(0) = 1$. Quanto può valere come minimo la somma delle radici?

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che $P(0)$ è il termine noto ed è anche il prodotto delle radici essendo pari il grado del polinomio. Per la disuguaglianza $AM \geqslant GM$ applicata alle n radici $a_1, \ldots, a_n$ che per ipotesi sono reali e positive, abbiamo che

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = \sqrt[n]{1} = 1$$

e quindi si ha

$$a_1 + \ldots + a_n \geqslant n.$$

Effettivamente n è il valore minimo in quanto si ottiene per $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$. $\diamond$

[n]

$\boxed{4}$ Due piloti di Formula 1 fanno una gara su un percorso circolare decidendo di fare 4 giri. Il primo mantiene per tutta la durata della corsa una velocità costante di 328 km/h. Il secondo invece va a 342 km/h durante il primo giro, a 320 km/h durante il secondo, 338 km/h durante il terzo e 312 km/h durante il quarto. Chi vince la corsa?
[Suggerimento : utilizzare le medie e le loro disuguaglianze.]

Svolgimento. Generalizziamo la questione. Immaginiamo che un pilota faccia n giri, mantenendo durante il primo giro una velocità v_1, durante il secondo una velocità v_2 e così via. Se chiamiamo l la lunghezza di un giro, allora il tempo impiegato a compiere il k-esimo giro è $t_k = \frac{l}{v_k}$. Il tempo totale è quindi

$$t_{tot} = t_1 + \ldots + t_n = \frac{l}{v_1} + \ldots + \frac{l}{v_n}.$$

La velocità media risulta

$$v = \frac{s_{tot}}{t_{tot}} = \frac{nl}{t_{tot}} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}}$$

in cui s_{tot} è lo spazio totale e osserviamo che il termine

$$\frac{n}{\frac{1}{v_1} + \ldots + \frac{1}{v_n}}$$

è proprio la media armonica di $v_1, \ldots, v_n$. Nel caso del nostro problema il secondo pilota ha una velocità che è la media armoinca di 342, 320, 338, 312; il primo, invece, ha una velocità media pari a 328 km/h cioè pari alla media aritmetica di 342, 320, 338, 312. Essendo la media aritmetica maggiore o uguale alla media armonica (in questo caso strettamente maggiore, perchè le quattro velocità non sono tutte uguali), vince il primo corridore. $\diamond$

[Primo corridore]

$\boxed{5}$ Sia data una successione di interi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tali che la media dei primi n numeri interi sia esattamente n, per ogni valore di n. Quanto vale λ_{2013}?

Svolgimento. La successione risulta essere univocamente determinata in modo ricorsivo, infatti l'equazione

$$\frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{n} = n$$

consente di ricavare λ_n in funzione di $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Sapendo che

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2,$$

ovvero

$$\frac{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)}{n} = n,$$

la successione $\lambda_k = 2k - 1$ soddisfa l'equazione data ed è pertanto l'unica soluzione. In particolare $\lambda_{2013} = 2 \cdot 2013 - 1 = 4025$. $\diamond$

[4025]

$\boxed{6}$ Qual è il minimo valore che può assumere

$$a\left(b^{\frac{1}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^3} + \frac{1}{b}\right)?$$

Svolgimento. Innanzitutto osserviamo che l'espressione data può essere riscritta nel seguente modo

$$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Applicando ora la disuguaglianza $AM \geqslant GM$ alla terna $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ si ottiene

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

e quindi

$$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{4}}.$$

Tale valore è il minimo se esiste una coppia di a e b per cui $\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$; essa esiste se e solo se posto $\frac{a}{b} = k$, l'equazione $k + \sqrt{\frac{1}{k}} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ ha soluzione. Una soluzione esiste per $k = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ (e quindi, ad esempio, $a = 1$ e $b = \sqrt[3]{4}$). ◇

[$\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$]

$\boxed{7}$ Sia $P(x) = x^{30} + a_{29}x^{29} + a_{28}x^{28} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio con i coefficienti a_i interi. Sappiamo che per tutti gli interi z compresi tra 1 e 30 si ha $p(z) = 3z$. Quali sono le ultime 3 cifre di $P(31)$?

Svolgimento. Sia $Q(x) = P(x) - 3x$. Per ipotesi $Q(x)$ ha grado 30, è monico (perchè $P(x)$ lo è) e si annulla in tutti gli interi tra 1 e 30. Quindi

$$P(x) = (x-1)\cdots(x-30) + 3x.$$

Per $x = 31$ otteniamo

$$P(31) = (31-1)\cdots(31-30) + 3 \cdot 31 = 30! + 93.$$

Dato che $30!$ è un multiplo di 1000, le ultime 3 cifre di $P(31)$ sono 093. ◇

[093]

$\boxed{8}$ Si determini il minimo valore dell'espressione

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{bd} + \frac{1}{cd}$$

se a, b, c, d sono numeri reali positivi la cui somma è 28.

Svolgimento. Dalla disuguaglianza tra media aritmetica e media armonica applicate ai numeri ab, ac, ad, bc, bd, cd otteniamo

$$\frac{6}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd}} \leqslant \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}, \tag{1}$$

e quindi

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd} \geqslant \frac{36}{ab+ac+ad+bc+bd+cd}. \tag{2}$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} ab+ac+ad+bc+bd+cd &= \frac{(a+b+c+d)^2-a^2-b^2-c^2-d^2}{2} \leqslant \\ &\leqslant \frac{(a+b+c+d)^2-\frac{(a+b+c+d)^2}{4}}{2} = \frac{28^2\cdot 3}{8} \end{aligned} \tag{3}$$

dove si è applicata la disuguaglianza tra media quadratica e media aritmetica. Combinando (2) e (3), deduciamo

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{cd} \geqslant \frac{6}{7^2}.$$

Notiamo che per $a=b=c=d=7$ si ha l'uguaglianza. Ne deduciamo, quindi, che il minimo dell'espressione a primo membro è proprio $\frac{6}{49}$. ◇

$[\frac{6}{49}]$

$\boxed{9}$ Sia $P(x)$ un polinomio di grado 999 tale che

$$P(1)=1,\ P(2)=\frac{1}{2},\ \ldots,\ P(1000)=\frac{1}{1000}.$$

Quanto vale $P(1001)$?

Svolgimento. Sia $Q(x)=xP(x)-1$. Per ipotesi $Q(x)$ si annulla per $x=1,2,\ldots,1000$ e ha grado 1000 (poiché $P(x)$ ha grado 999), quindi

$$Q(x)=k(x-1)(x-2)\cdots(x-1000).$$

Il coefficiente direttivo k può essere determinato imponendo che $Q(x)+1$, che per definizione è uguale a $xP(x)$, abbia termine noto uguale a 0. Il termine noto di $Q(x)$ è $k\cdot 1000!$, quindi abbiamo che

$$k=-\frac{1}{1000!}.$$

Riassumendo, finora abbiamo dimostrato che

$$xP(x) - 1 = -\frac{1}{1000!}(x-1)(x-2)\cdots(x-1000).$$

Per $x = 1001$ otteniamo

$$1001 \cdot P(1001) - 1 = -\frac{1}{1000!}(1001-1)(1001-2)\cdots(1001-1000) = -1.$$

Risulta quindi che $P(1001) = 0$. ◇

[0]

$\boxed{10}$ Sia f una funzione definita per ogni x diversa da 0 e da 1, tale che per ogni x diversa da 0 e da 1 si abbia

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

Quanto vale $f(10)$?

Svolgimento. Sostituendo $x = 10$ nell'equazione data, otteniamo

$$f(10) + f\left(\frac{1}{1-10}\right) = 10$$

e quindi

$$f(10) + f\left(-\frac{1}{9}\right) = 10;$$

prendiamo ora $x = -\frac{1}{9}$, sostituiamolo nell'equazione data e otteniamo

$$f\left(-\frac{1}{9}\right) + f\left(\frac{1}{1+\frac{1}{9}}\right) = -\frac{1}{9}$$

e quindi

$$f\left(-\frac{1}{9}\right) + f\left(\frac{9}{10}\right) = -\frac{1}{9};$$

analogamente con $x = \frac{9}{10}$ troviamo

$$f\left(\frac{9}{10}\right) + f\left(\frac{1}{1-\frac{9}{10}}\right) = \frac{9}{10}$$

e quindi

$$f\left(\frac{9}{10}\right) + f\,(10) = \frac{9}{10}.$$

Il problema si riduce quindi al seguente sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 10 \\ \beta + \gamma = -\frac{1}{9} \\ \alpha + \gamma = \frac{9}{10} \end{cases}$$

dove abbiamo posto $\alpha = f(10)$, $\beta = f\left(-\frac{1}{9}\right)$, $\gamma = f\left(\frac{9}{10}\right)$. Dopo alcuni passaggi troviamo che $\alpha = f(10) = \frac{991}{180}$ che è il valore che cercavamo. $\diamond$

$[\frac{991}{180}]$