1. *Sfera e coni*

È assegnata una sfera di raggio pari a 1.6m.
Si determinino i coni retti, inscritti nella sfera, di area laterale massima e di volume massimo, rispettivamente.
Si fornisca come risultato la differenza delle capacità dei due coni, misurata in decimetri cubi.

Soluzione. [0000]

Svolgimento.
Si tratta di due semplici problemi di massimo, se svolti separatamente.
Altrimenti è facile vedere, prima di procedere all'individuazione dei due coni, che, in realtà, è lo stesso cono a massimizzare le due quantità sopra menzionate (ciò dipende dal fatto che in una sfera di raggio assegnato R, detti r e h il raggio di base e l'altezza del cono inscritto vale l'uguaglianza

$$r^2 + (h-R)^2 = R^2,$$

come conseguenza del teorema di Pitagora).

2. *Minimo nel piano*

Si considerino nel piano cartesiano i tre punti A(3,4.5), B(2,3) e C(3,0).
Si richiede di individuare le coordinate del punto H tale da rendere minima la somma d(A,H) + d(B,H) + d(C,H).
Si fornisca poi come risultato l'ordinata del punto determinato, indicando da destra a sinistra, unità, decimi, centesimi e millesimi di tale valore.

Soluzione. [0003]

Svolgimento.
Il quesito di cui sopra è un caso particolare di un problema di carattere più generale, noto come *Problema di Steiner*.
Si prova che, assegnati tre punti A, B e C in un piano, esiste ed è unico il punto H del piano che minimizza la somma a + b + c, dove a, b e c indicano le tre distanze di H da A, B e C rispettivamente.
Si vede inoltre che:
- se nel triangolo ABC tutti gli angoli sono minori di 120°, P è il punto che proietta ciascuno dei tre lati (AB, BC e CA) secondo un angolo di 120°;
- altrimenti, ovverossia se un angolo di ABC è maggiore di 120°, il punto C coincide con il vertice del triangolo che corrisponde all'angolo massimo.

Nello specifico è facile verificare che l'angolo ^ABC è maggiore di 120°.
Infatti risulta, fissato H(3,3):

tan(^ABH) = 1.5 e tan(^CBH) = 3,
tan(^ABC) = tan(^ABH + ^CBH) = (4.5)/(1 - 4.5) = -1.286,
tan(^ABC) > tan(120°) = -1.732,
da cui ^ABC > 120°, essendo tan monotona su (π/2,3π/2).

Concludiamo quindi che il punto cercato è B, che ha 3 come ordinata.

3. *Minimo nello spazio*

Sono assegnati i punti A(2,2,1), B(2,3,1), C(4,1,3) e D(4,3,3).
Si determini il punto H della retta r passante per B e D che minimizza la somma d(A,H) + d(C,H).
Si fornisca poi come risultato la quota del punto determinato, indicando da destra a sinistra, unità, decimi, centesimi e millesimi di tale valore.

Soluzione. [6662]

Svolgimento.
Osserviamo che i punti B, C e D sono i traslati del punto A mediante il vettore $\mathbf{v}_1 = (0,1,0)$, il vettore $-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = (2,-1,2)$ (essendo $v_2 = (1,0,1)$ ortogonale a $\mathbf{v}_1$) ed il vettore $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, rispettivamente. Questo prova la complanarità dei quattro punti assegnati e suggerisce quindi che il problema può essere trattato più naturalmente nel piano.
Poniamoci dunque in un contesto bidimensionale; siano:
- A'(0,0);
- $\mathbf{e}_1 = (1,0)$;
- $\mathbf{e}_2 = (0,1)$.

Vengono, dunque, ad essere individuati i punti:
- B'(1,0), traslato di A' mediante $\mathbf{e}_1$;
- C'(-1,2), traslato di A' mediante $-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$;
- D'(1,2), traslato di A' mediante $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$.

La configurazione così ottenuta conserva molte delle proprietà geometriche di quella di partenza; in particolare le proprietà conservate sono sufficienti a garantire che per risolvere il problema iniziale basta riformularlo nel piano, risolverlo in tale contesto, più semplice rispetto a quello di partenza, e, infine, "tornare indietro" per individuare il punto dello spazio corrispondente alla soluzione trovata nel piano. Cominciamo!
Per prima cosa dobbiamo convincerci che per riformulare il problema nel piano basta banalmente mettere gli apici al testo del problema.
La soluzione di tale problema, nel piano, è altrettanto banale; risulta infatti che H', sulla retta r' passante per B' e D', minimizza la somma d(A',H') + d(C',H') se e solo se minimizza la somma d(A'',H') + d(C',H'), essendo A'' il trasformato di A mediante la simmetria assiale di retta r'.
È evidente che H' coincide dunque con il punto di intersezione tra r' e la retta per C' e A''; risulta quindi H'(1,2/3).
Osserviamo che H' è il traslato di A' mediante $(\mathbf{e}_1 + (2/3)\mathbf{e}_2)$.
Il punto che volevamo determinare è dunque, per quanto detto in precedenza, il traslato di A mediante il vettore $(\mathbf{v}_1 + (2/3)\mathbf{v}_2)$, ossia H(8/3,3,5/3).

Nota.
Per una trattazione generale completa del *Problema di Steiner* si rimanda a
http://www.mat.uniroma1.it/didattica/ssis/laboratorio-di-informatica/0304/ApreaCarbonariTurchettaVoso/main.htm