

### PROBLEMA 1

E' data una piramide avente per base un quadrilatero ABCD e vertice V, inscritta in una sfera. Si sa che  $AD = 2BC$ , e che le rette ottenute prolungando AB e CD si incontrano in un punto E dalla parte del segmento BC. Calcolare il rapporto tra il volume della piramide avente per base il triangolo AED e vertice V e la piramide data.

#### Svolgimento

Il quadrilatero ABCD risulta inscritto in una circonferenza ottenuta intersecando il piano della base della piramide con la sfera circoscritta. Allora gli angoli opposti sono supplementari. Considero i triangoli ADE e CBE. Essi hanno l'angolo in E in comune, inoltre sono uguali gli angoli ECB e EAD, perchè entrambi supplementari di  $\widehat{BCD}$ , e analogamente gli angoli EBC e EDA perchè supplementari di ABC. Quindi i due triangoli sono simili con rapporto di similitudine 2:1 per ipotesi. Allora l'area di ADE è quattro volte l'area di BCE e  $\frac{4}{3}$  dell'area di ABCD. Poiché le altezze delle due piramidi sono uguali, il rapporto tra i volumi richiesti coincide col rapporto fra le aree di base ABCD e ADE, quindi  $\frac{4}{3}$ .

### PROBLEMA 2

Sia ABC un triangolo isoscele con  $AB = AC$ . Si supponga che la bisettrice dell'angolo ABC incontri il lato AC nel punto D e che  $BC = BD + AD$ . Si determini l'ampiezza dell'angolo BAC.

#### Svolgimento

Chiamo con  $2\alpha$  l'angolo  $ABC = ACB$ . Quindi l'angolo  $ABD = DBC = \alpha$ . Sia E il punto sul lato BC tale che  $BE = BD$ . Allora  $AD = BC - BD = BC - BE = EC$ . Per il Teorema della bisettrice si ha che  $AD / DC = AB / BC$ . Ricordando che  $AB = AC$  e che  $AD = EC$  si ottiene  $EC / DC = AC / BC$ .

Allora i triangoli EDC e ABC sono simili, avendo i lati in proporzione e l'angolo ACB in comune. Poiché ABC è isoscele lo è anche EDC, quindi l'angolo  $EDC = ACB = 2\alpha$ . Allora l'angolo  $DEB = 4\alpha$  e l'angolo  $EDB = 180 - 5\alpha = 4\alpha$  perchè il triangolo BDE è isoscele per costruzione.

Allora  $\alpha = 20^\circ$  e l'angolo richiesto è  $100^\circ$ .

### PROBLEMA 3

Una sfera di raggio  $R = 15$  cm è appoggiata su due binari paralleli distanti tra loro 24 cm. Se la sfera effettua una rotazione completa, di quanto avanza sui binari ?

#### Svolgimento

Mentre la sfera ruota, il punto di contatto con i binari si muove su una circonferenza di raggio  $r = 9$ , perchè per il teorema di Pitagora si ha che  $r^2 = 15^2 - 12^2$ . La lunghezza di questa circonferenza è allora  $2\pi \cdot 9 = 18\pi$  cm.