Questa geometria è un puzzle

Luca Lussardi

Università Cattolica del Sacro Cuore - Brescia

Allenamenti di Matematica
3 febbraio 2012
Brescia

Che cos'è la quadratura?

- I livello: dato un poligono, esiste un quadrato con la stessa area? Sì: $A =$ area del poligono, allora considero il quadrato di lato $\ell := \sqrt{A}$.
- II livello: dato un poligono, posso costruire il quadrato ad esso equivalente con riga e compasso?
- III livello: dato un poligono, posso decomporlo in poligoni in modo tale che ricomponendo i pezzi trovo il quadrato equivalente al poligono dato?
- IV livello: cosa posso dire per le figure curve? posso quadrare con riga e compasso una figura curva?

Che cos'è la quadratura?

- I livello: dato un poligono, esiste un quadrato con la stessa area? Sì: $A =$ area del poligono, allora considero il quadrato di lato $\ell := \sqrt{A}$.
- II livello: dato un poligono, posso costruire il quadrato ad esso equivalente con riga e compasso?
- III livello: dato un poligono, posso decomporlo in poligoni in modo tale che ricomponendo i pezzi trovo il quadrato equivalente al poligono dato?
- IV livello: cosa posso dire per le figure curve? posso quadrare con riga e compasso una figura curva?

Che cos'è la quadratura?

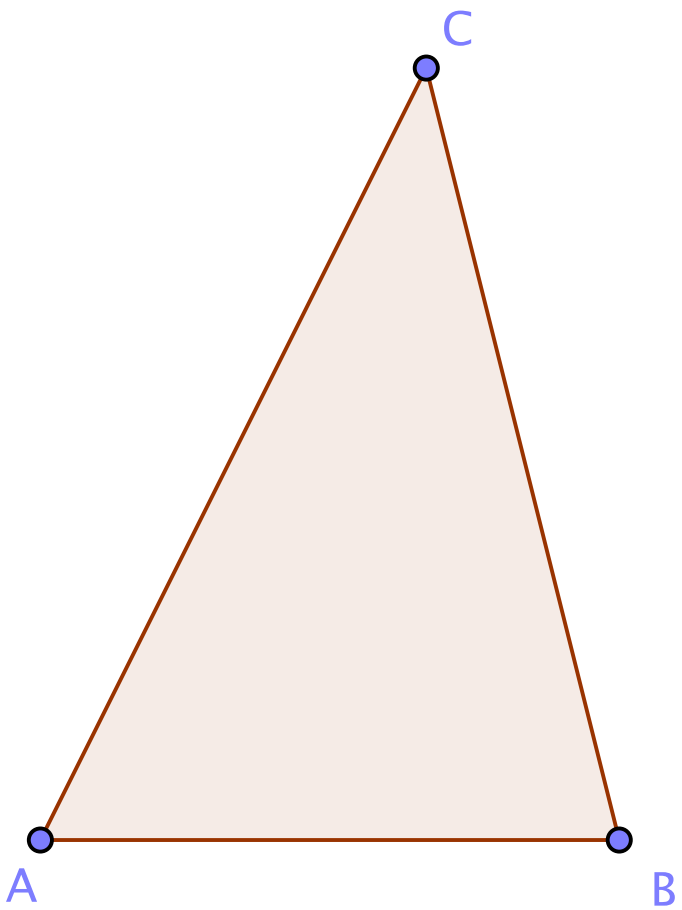
- I livello: dato un poligono, esiste un quadrato con la stessa area? Sì: $A =$ area del poligono, allora considero il quadrato di lato $\ell := \sqrt{A}$.
- II livello: dato un poligono, posso costruire il quadrato ad esso equivalente con riga e compasso?
- III livello: dato un poligono, posso decomporlo in poligoni in modo tale che ricomponendo i pezzi trovo il quadrato equivalente al poligono dato?
- IV livello: cosa posso dire per le figure curve? posso quadrare con riga e compasso una figura curva?

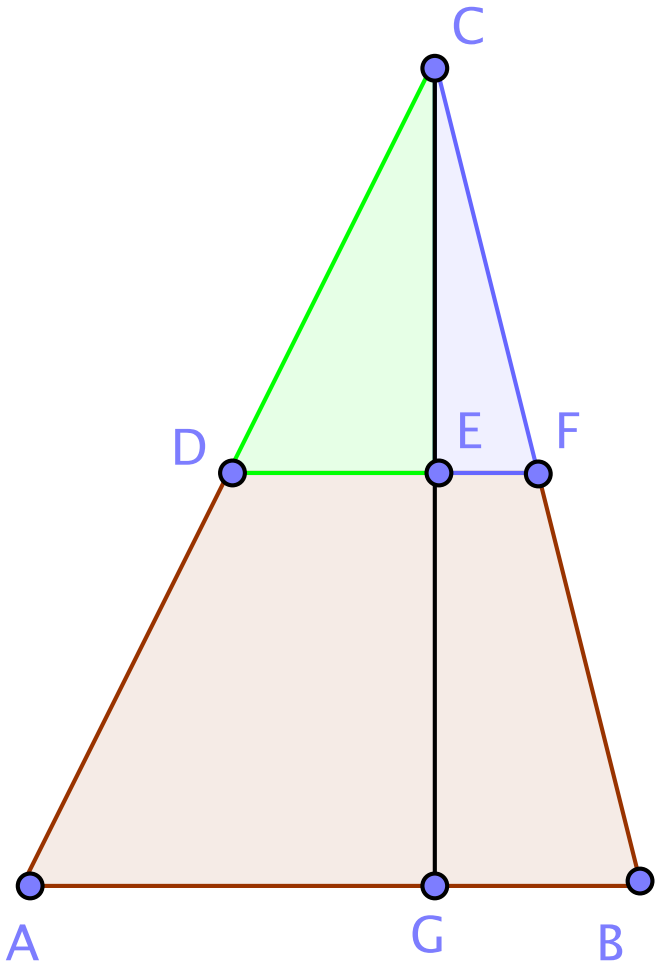
Che cos'è la quadratura?

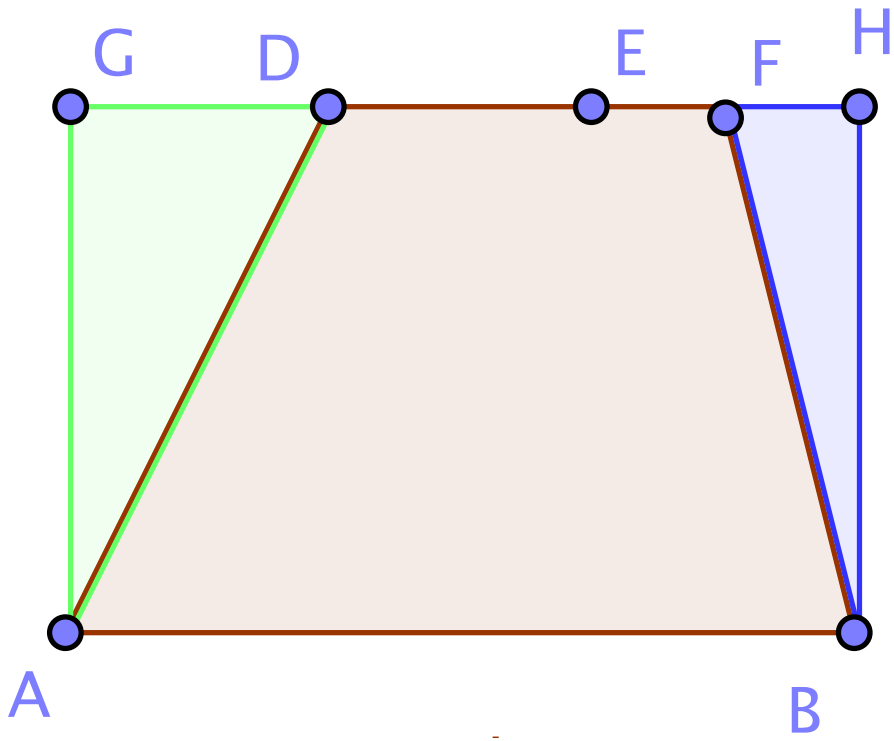
- I livello: dato un poligono, esiste un quadrato con la stessa area? Sì: $A =$ area del poligono, allora considero il quadrato di lato $\ell := \sqrt{A}$.
- II livello: dato un poligono, posso costruire il quadrato ad esso equivalente con riga e compasso?
- III livello: dato un poligono, posso decomporlo in poligoni in modo tale che ricomponendo i pezzi trovo il quadrato equivalente al poligono dato?
- IV livello: cosa posso dire per le figure curve? posso quadrare con riga e compasso una figura curva?

Quadriamo il triangolo

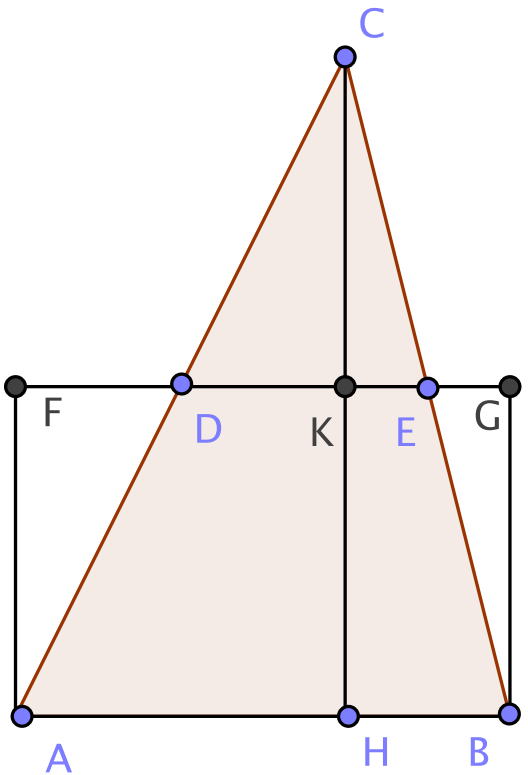
Primo step: dal triangolo al rettangolo





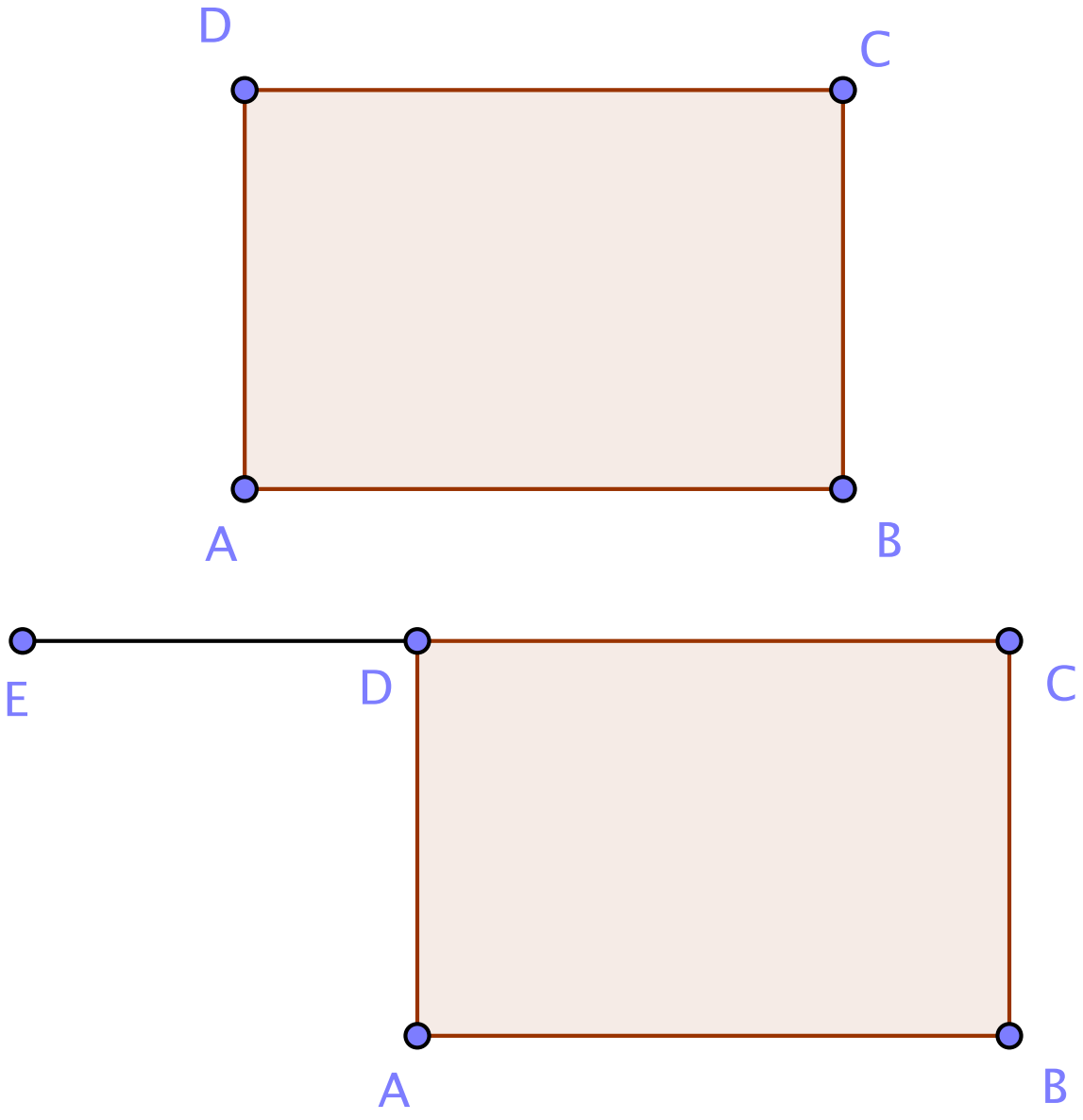

G
D
E
F
H
A
B

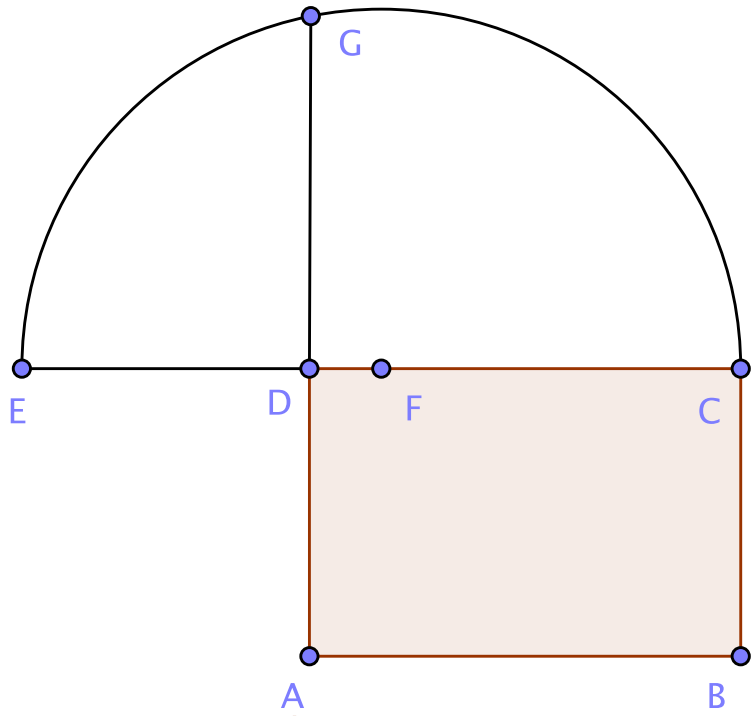
Perché la procedura funziona?

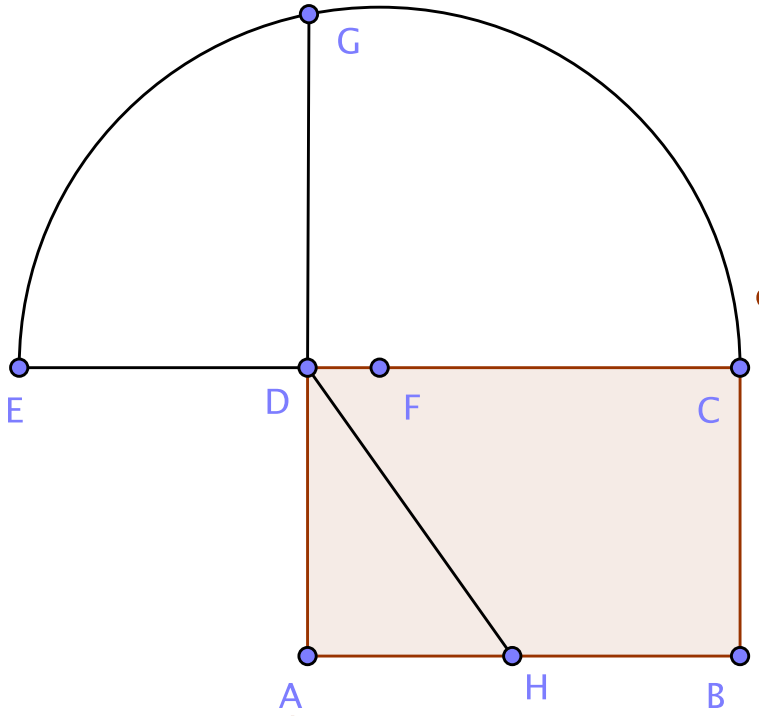


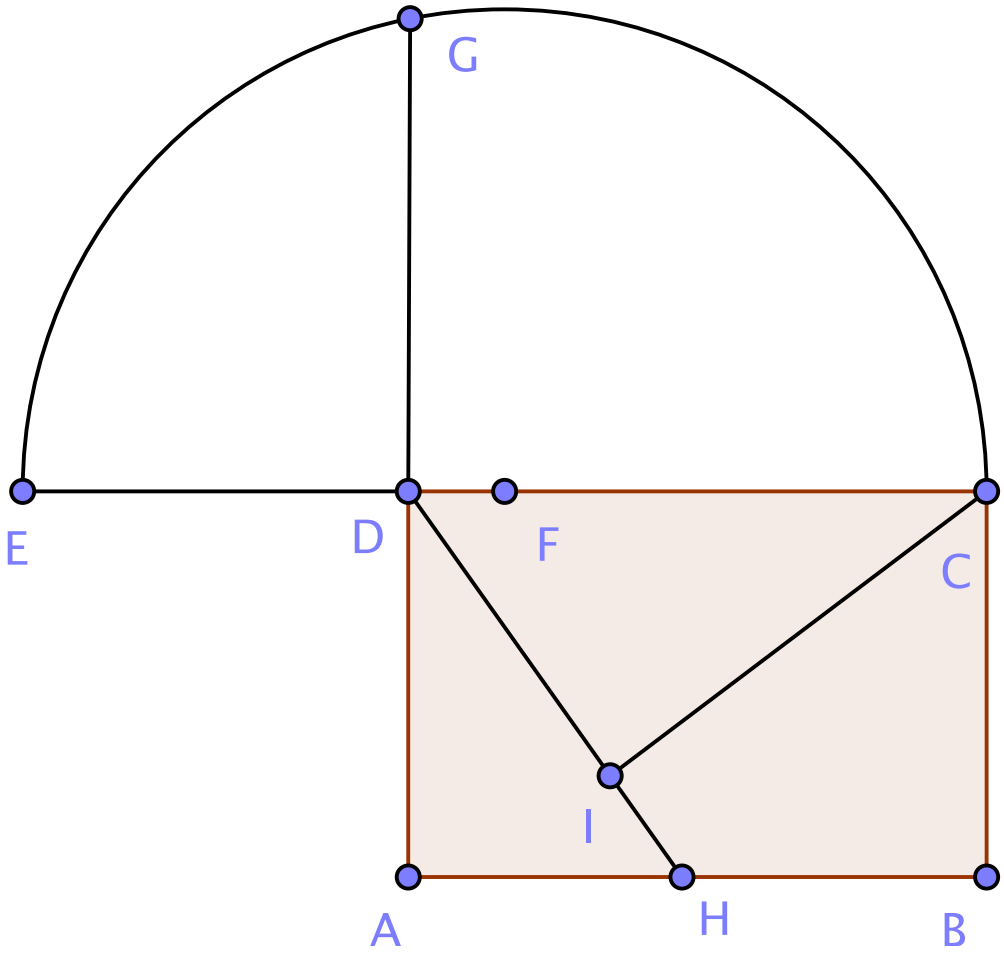
- Se $|AD| = |DC|$ e $|CE| = |EB|$ allora per il teorema di Talete $AB \parallel DE$, e quindi essendo $CH \perp AB$ segue $CK \perp DE$. Da questo discende che DKC e ADF sono isometrici e $\hat{F}$ è retto e KEC e BGE sono isometrici e $\hat{G}$ è retto.

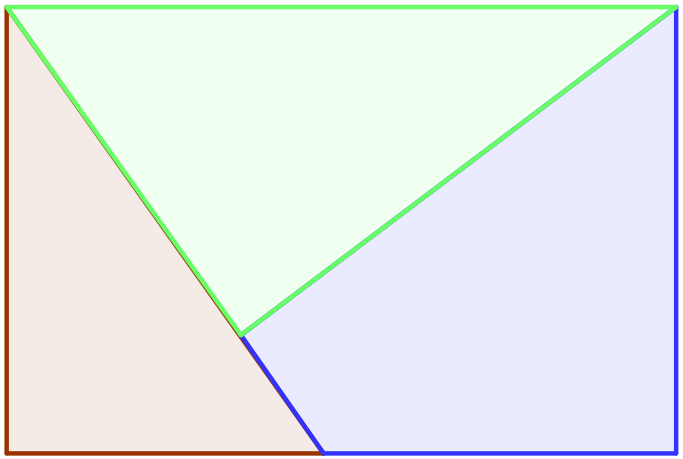
Secondo step: dal rettangolo al quadrato

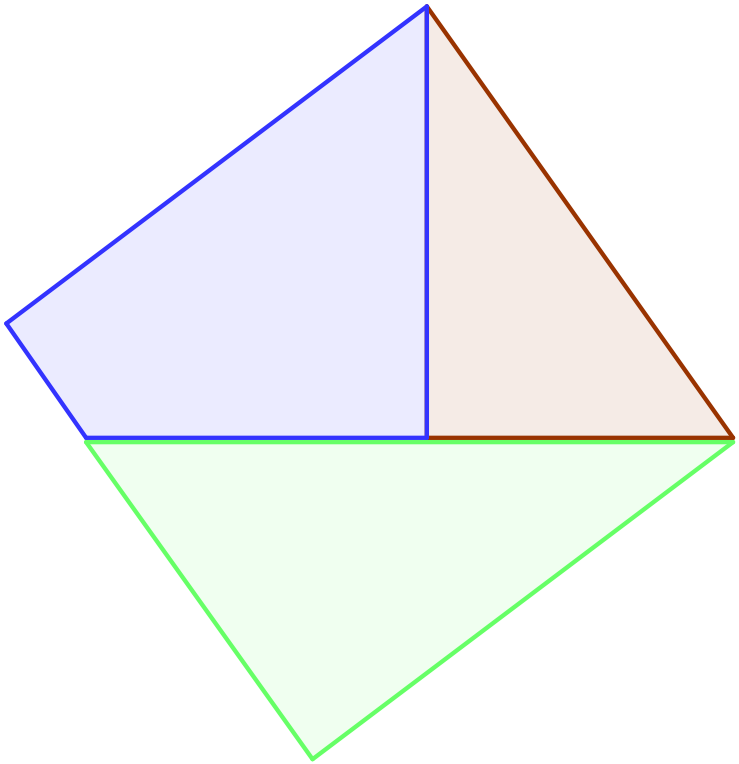



G
E
D
F
C
A
B

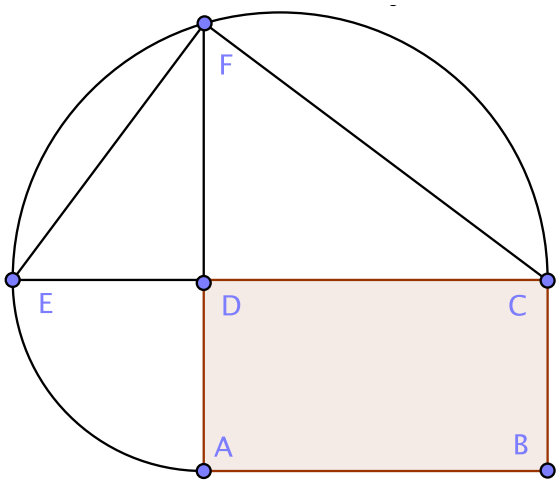

G
E
D
F
C
A
H
B


G
E
D
F
C
I
A
H
B

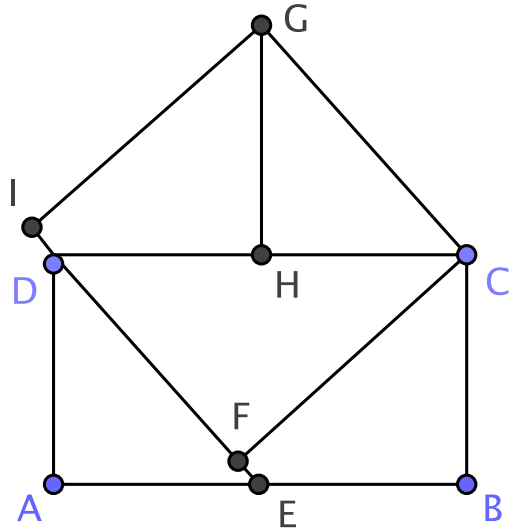




Perché la procedura funziona?

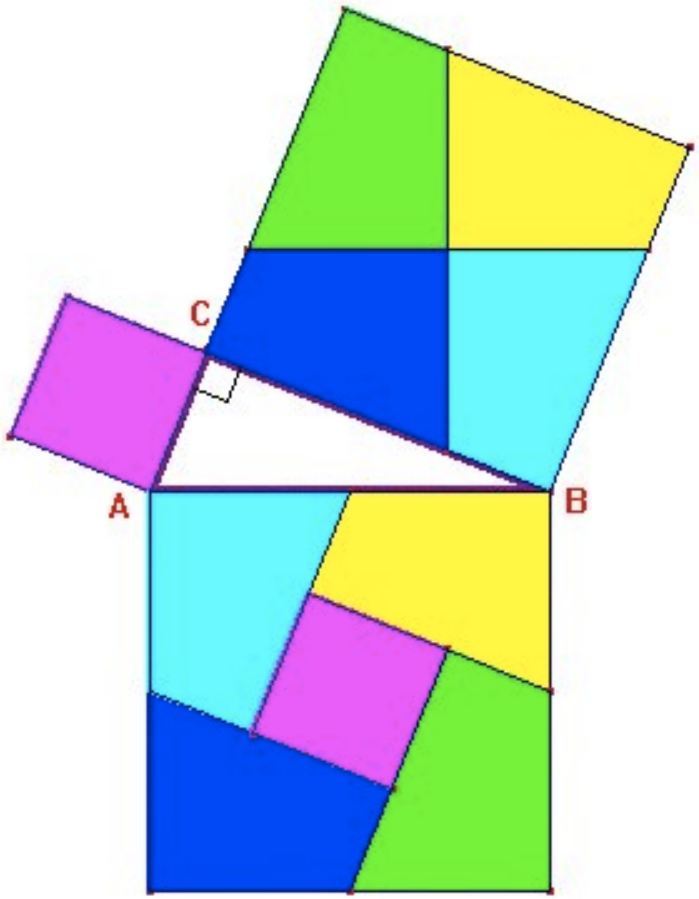


- Per il secondo teorema di Euclide: $|DF|^2 = |ED| \cdot |DC| = |AD| \cdot |DC|$.



- Il quadrilatero $FCGI$, che ha la stessa area di $ABCD$, ha 4 angoli retti. Inoltre: $|CF| \cdot |ED| = |AB| \cdot |AD| = |ED|^2$, da cui $|CF| = |ED| = |FI|$, e quindi $FCGI$ è un quadrato.

Il teorema di Pitagora



Il puzzle di Perigal (1873)

Dissezioniamo i poligoni

- Un poligono qualunque può essere dissezionato in tanti triangoli.
- Decompongo ogni triangolo in modo da ottenere un quadrato.
- Sommo i quadrati così ottenuti da ogni triangolo col puzzle di Perigal.

Dissezioniamo i poligoni

- Un poligono qualunque può essere dissezionato in tanti triangoli.
- Decompongo ogni triangolo in modo da ottenere un quadrato.
- Sommo i quadrati così ottenuti da ogni triangolo col puzzle di Perigal.

Dissezioniamo i poligoni

- Un poligono qualunque può essere dissezionato in tanti triangoli.
- Decompongo ogni triangolo in modo da ottenere un quadrato.
- Sommo i quadrati così ottenuti da ogni triangolo col puzzle di Perigal.

Un esempio

Equiscindibilità

- Due poligoni si dicono *equiscindibili* se possono essere partizionati in uno stesso numero finito di poligoni a due a due isometrici mediante rototraslazioni.
- Teorema: due poligoni sono equiscindibili se e solo se hanno la stessa area.
- Cosa succede nello spazio tridimensionale?
- Due poliedri si dicono *equiscindibili* se possono essere partizionati in uno stesso numero finito di poliedri a due a due isometrici mediante rototraslazioni.

Equiscindibilità

- Due poligoni si dicono *equiscindibili* se possono essere partizionati in uno stesso numero finito di poligoni a due a due isometrici mediante rototraslazioni.
- Teorema: due poligoni sono equiscindibili se e solo se hanno la stessa area.
- Cosa succede nello spazio tridimensionale?
- Due poliedri si dicono *equiscindibili* se possono essere partizionati in uno stesso numero finito di poliedri a due a due isometrici mediante rototraslazioni.

Equiscindibilità

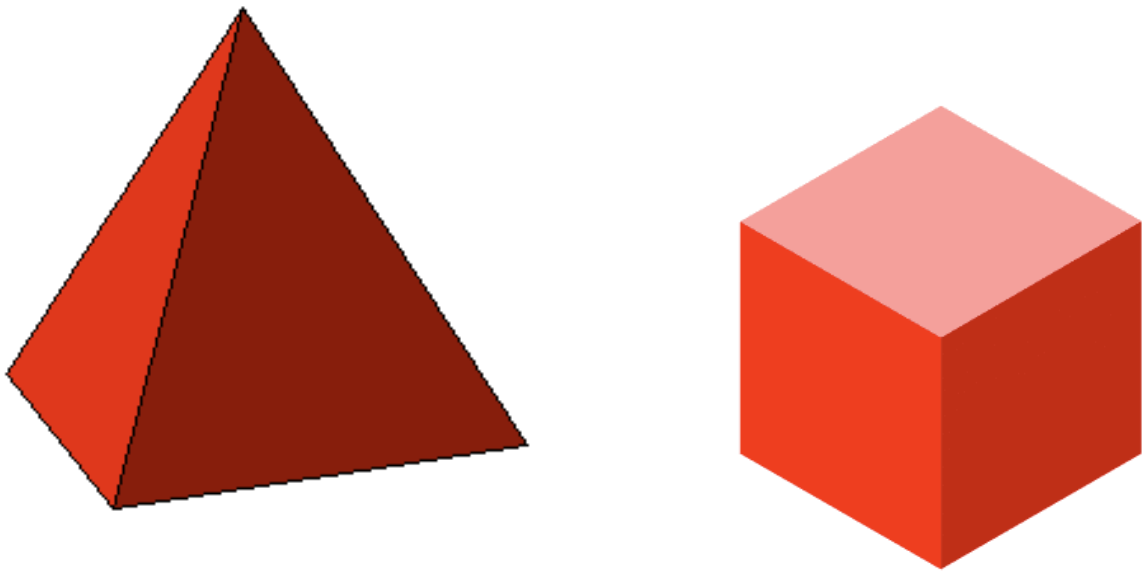
- Due poligoni si dicono *equiscindibili* se possono essere partizionati in uno stesso numero finito di poligoni a due a due isometrici mediante rototraslazioni.
- Teorema: due poligoni sono equiscindibili se e solo se hanno la stessa area.
- Cosa succede nello spazio tridimensionale?
- Due poliedri si dicono *equiscindibili* se possono essere partizionati in uno stesso numero finito di poliedri a due a due isometrici mediante rototraslazioni.

Equiscindibilità

- Due poligoni si dicono *equiscindibili* se possono essere partizionati in uno stesso numero finito di poligoni a due a due isometrici mediante rototraslazioni.
- Teorema: due poligoni sono equiscindibili se e solo se hanno la stessa area.
- Cosa succede nello spazio tridimensionale?
- Due poliedri si dicono *equiscindibili* se possono essere partizionati in uno stesso numero finito di poliedri a due a due isometrici mediante rototraslazioni.

Un primo risultato inaspettato

Teorema (Dehn, 1901): Un tetraedro regolare e un cubo dello stesso volume non sono equiscindibili.



Conseguenza curiosa: solo il calcolo integrale può *giustificare* la formula del volume della piramide.

Idea essenziale della dimostrazione

Se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ hanno rapporto irrazionale (esempio $1, \sqrt{2}$ o $1, \pi$) allora esiste una funzione $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ additiva, cioé

$$L(x+y) = L(x) + L(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

$\mathbb{Q}$-lineare, cioé

$$L(qx) = qL(x), \quad \forall q \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R},$$

ma tale che

$$L(x_1) = 0, \quad L(x_2) \neq 0.$$

Come procede la dimostrazione

- P poliedro,
- s spigolo,
- $\ell_s =$ lunghezza dello spigolo s,
- $\alpha_s =$ angolo diedro tra le facce che si appoggiano su s,
- $$\Lambda(P) = \sum_s L(\alpha_s)\ell_s, \quad \text{per una certa } L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
- Supponiamo P partizionato in poliedri $P_1, \ldots, P_n$.

Come procede la dimostrazione

- P poliedro,
- s spigolo,
- $\ell_s =$ lunghezza dello spigolo s,
- $\alpha_s =$ angolo diedro tra le facce che si appoggiano su s,
- $$\Lambda(P) = \sum_s L(\alpha_s)\ell_s, \quad \text{per una certa } L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
- Supponiamo P partizionato in poliedri $P_1, \ldots, P_n$.

Come procede la dimostrazione

- P poliedro,
- s spigolo,
- $\ell_s =$ lunghezza dello spigolo s,
- $\alpha_s =$ angolo diedro tra le facce che si appoggiano su s,
- $$\Lambda(P) = \sum_s L(\alpha_s)\ell_s, \quad \text{per una certa } L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
- Supponiamo P partizionato in poliedri $P_1, \ldots, P_n$.

Come procede la dimostrazione

- P poliedro,
- s spigolo,
- $\ell_s =$ lunghezza dello spigolo s,
- $\alpha_s =$ angolo diedro tra le facce che si appoggiano su s,
- $$\Lambda(P) = \sum_s L(\alpha_s)\ell_s, \quad \text{per una certa } L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
- Supponiamo P partizionato in poliedri $P_1, \ldots, P_n$.

Come procede la dimostrazione

- P poliedro,
- s spigolo,
- $\ell_s =$ lunghezza dello spigolo s,
- $\alpha_s =$ angolo diedro tra le facce che si appoggiano su s,
- $$\Lambda(P) = \sum_s L(\alpha_s)\ell_s, \quad \text{per una certa } L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
- Supponiamo P partizionato in poliedri $P_1, \ldots, P_n$.

Come procede la dimostrazione

- P poliedro,
- s spigolo,
- $\ell_s =$ lunghezza dello spigolo s,
- $\alpha_s =$ angolo diedro tra le facce che si appoggiano su s,
- $$\Lambda(P) = \sum_s L(\alpha_s)\ell_s, \quad \text{per una certa } L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
- Supponiamo P partizionato in poliedri $P_1, \ldots, P_n$.

- Se scelgo L additiva, $\mathbb{Q}$-lineare e tale che $L(\pi) = 0$ allora ho

$$\Lambda(P_1) + \cdots + \Lambda(P_n) = \Lambda(P)$$

cioé: se due poliedri P e Q sono equiscindibii allora

$$\Lambda(P) = \Lambda(Q).$$

- $C =$ cubo, allora gli angoli diedri valgono tutti $\pi/2$. Dunque

$$\Lambda(C) = 0.$$

- $T =$ tetraedro regolare allora mi basta scegliere L in modo tale per cui si abbia $L(\arccos 1/3) \neq 0$ ($\arccos 1/3$ e π hanno rapporto irrazionale), per avere

$$\Lambda(T) \neq 0.$$

- Se scelgo L additiva, $\mathbb{Q}$-lineare e tale che $L(\pi) = 0$ allora ho

$$\Lambda(P_1) + \cdots + \Lambda(P_n) = \Lambda(P)$$

cioé: se due poliedri P e Q sono equiscindibii allora

$$\Lambda(P) = \Lambda(Q).$$

- $C =$ cubo, allora gli angoli diedri valgono tutti $\pi/2$. Dunque

$$\Lambda(C) = 0.$$

- $T =$ tetraedro regolare allora mi basta scegliere L in modo tale per cui si abbia $L(\arccos 1/3) \neq 0$ ($\arccos 1/3$ e π hanno rapporto irrazionale), per avere

$$\Lambda(T) \neq 0.$$

Dalle figure geometriche agli insiemi: equidecomponibilità

Due insiemi A e B, sottoinsiemi del piano o dello spazio tridimensionale, sono *equidecomponibili* se è possibile trovare degli insiemi $A_1, \ldots, A_N$ e delle rototraslazioni $\theta_1, \ldots, \theta_N$, rispettivamente del piano o dello spazio, tali che

$$A = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} A_N$$

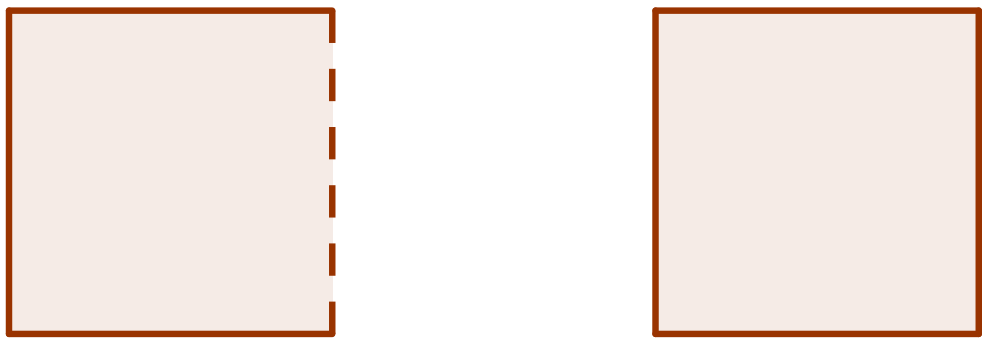
e

$$B = \theta_1(A_1) \dot{\cup} \theta_2(A_2) \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} \theta(A_N).$$

Cosa cambia rispetto all'equiscindibilità?

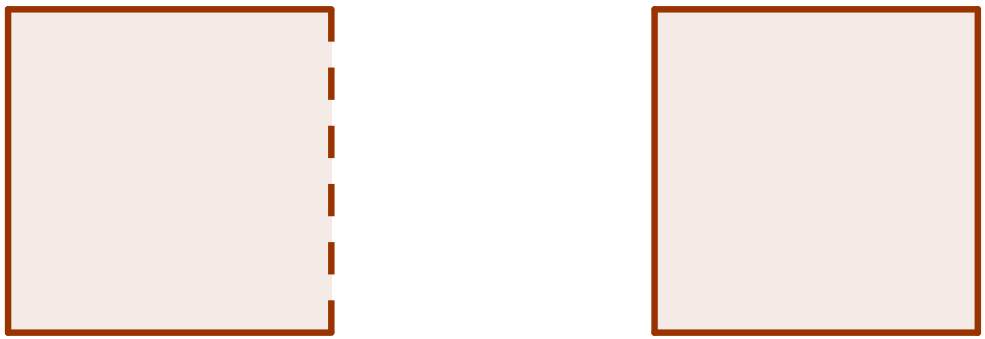
Il rettangolo di base 2 e altezza 1
è equidecomponibile in due quadrati?

Stacco i due quadrati:



Ma rimane la parte tratteggiata . . .

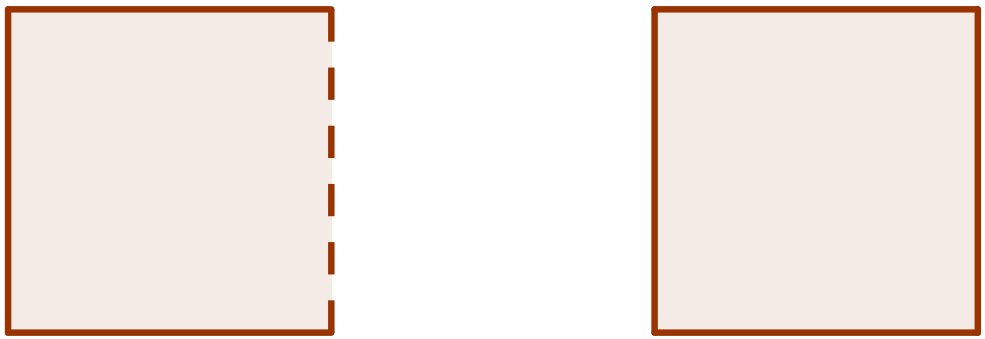
- Si riesce a dimostrare che i due quadrati seguenti



sono equidecomponibili.

- I vari pezzi non sono però misurabili: non si può misurare la loro area.

- Si riesce a dimostrare che i due quadrati seguenti



sono equidecomponibili.

- I vari pezzi non sono però misurabili: non si può misurare la loro area.

Un fatto paradossale?

- Siamo portati a pensare che esista un modo che consenta di misurare area o volume di *ogni* figura piana o solida rispettivamente.
- Quando però pensiamo alle figure come insieme dei loro punti questa intuizione non vale.
- Esiste un assioma della teoria degli insiemi, detto

  assioma della scelta

  che è il responsabile di questi fatti paradossali: accettarlo implica anche il dover accettare che non esiste un modo per misurare sempre l'area o il volume di un dato insieme. Gli insiemi *misurabili* sono quindi solo alcuni (ma per fortuna tanti) tra tutti gli insiemi.
- Perché allora accettare l'assioma della scelta? Esso interviene in modo essenziale in alcune dimostrazioni di risultati molto importanti in matematica.

Un fatto paradossale?

- Siamo portati a pensare che esista un modo che consenta di misurare area o volume di *ogni* figura piana o solida rispettivamente.
- Quando però pensiamo alle figure come insieme dei loro punti questa intuizione non vale.
- Esiste un assioma della teoria degli insiemi, detto

  assioma della scelta

  che è il responsabile di questi fatti paradossali: accettarlo implica anche il dover accettare che non esiste un modo per misurare sempre l'area o il volume di un dato insieme. Gli insiemi *misurabili* sono quindi solo alcuni (ma per fortuna tanti) tra tutti gli insiemi.
- Perché allora accettare l'assioma della scelta? Esso interviene in modo essenziale in alcune dimostrazioni di risultati molto importanti in matematica.

Un fatto paradossale?

- Siamo portati a pensare che esista un modo che consenta di misurare area o volume di *ogni* figura piana o solida rispettivamente.
- Quando però pensiamo alle figure come insieme dei loro punti questa intuizione non vale.
- Esiste un assioma della teoria degli insiemi, detto

  assioma della scelta

  che è il responsabile di questi fatti paradossali: accettarlo implica anche il dover accettare che non esiste un modo per misurare sempre l'area o il volume di un dato insieme. Gli insiemi *misurabili* sono quindi solo alcuni (ma per fortuna tanti) tra tutti gli insiemi.
- Perché allora accettare l'assioma della scelta? Esso interviene in modo essenziale in alcune dimostrazioni di risultati molto importanti in matematica.

Un fatto paradossale?

- Siamo portati a pensare che esista un modo che consenta di misurare area o volume di *ogni* figura piana o solida rispettivamente.
- Quando però pensiamo alle figure come insieme dei loro punti questa intuizione non vale.
- Esiste un assioma della teoria degli insiemi, detto

  assioma della scelta

  che è il responsabile di questi fatti paradossali: accettarlo implica anche il dover accettare che non esiste un modo per misurare sempre l'area o il volume di un dato insieme. Gli insiemi *misurabili* sono quindi solo alcuni (ma per fortuna tanti) tra tutti gli insiemi.
- Perché allora accettare l'assioma della scelta? Esso interviene in modo essenziale in alcune dimostrazioni di risultati molto importanti in matematica.

Ma le stranezze non sono finite . . .

Una sfera e due copie della stessa,
nello spazio tridimensionale, sono equidecomponibili.
(paradosso di Banach-Tarski, 1924).