# 1 Esercizi

## 1.1 Fibonacci1

Dimostrare che
$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 \;=\; F_n F_{n+1}.$$

*Dimostrazione.* Per induzione su $n$. Per $n = 1$ si ha
$$F_1^2 = 1 = F_1 F_2.$$

Per $n \geq 1$, supponiamo vero per $n$, dimostriamo per $n + 1$.
$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i^2 = F_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_{n+1}^2 + F_n F_{n+1} = F_{n+1}(F_{n+1} + F_n) = F_{n+1} F_{n+2}.$$
□

## 1.2 Fibonacci2

Dimostrare che
$$\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2n+2}$$

*Dimostrazione.* Induzione su n. Per $n = 0$ ovvio, supponiamo $n \geq 1$, vero per $n$, dimostriamo per $n + 1$.
$$\sum_{i=0}^{n+1} F_{2i+1} = F_{2(n+1)+1} + \sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2(n+1)+1} + F_{2n+2} = F_{2n+3}.$$
□

## 1.3 Fibonacci3

Dimostrare che
$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

*Dimostrazione.* Induzione su $n$. Ovvio per $n = 1$, sia $n \geq 1$, vero per $n$ lo dimostriamo per $n + 1$... □

### 1.4 Esercizio 4

Consideriamo $2n$ punti nello spazio collegati da $n^2+1$ segmenti. Dimostrare che esiste almeno un insieme di 3 punti collegati a 2 a 2 da segmenti ($n \geq 2$).

*Dimostrazione.* Induzione su $n$. Per $n = 2$ ovvio. Sia $n \geq 2$, vero per $n$ lo dimostriamo per $n+1$. Consideriamo quindi $2(n+1)$ punti collegati da $(n+1)^2+1$ segmenti. Supponiamo per assurdo che la tesi non sia vera, possiamo allora considerare una coppia di punti collegati tra loro. Questi due punti saranno collegati al piú a $2n$ punti complessivamente. Possiamo allora cancellare questi due punti e tutti i segmenti corrispondenti, ottenendo una nuova configurazione di $2n$ punti e almeno $n^2+1$ segmenti. Per ipotesi induttiva, la tesi vale per questa configurazione, quindi vale anche per quella iniziale, da cui l'assurdo. □

### 1.5 Monumenti matematici

(candidato disfida) Nella piazza principale della cittá troneggia una stele di pietra. L'iscrizione della stele è un triangolo che ha sui lati i numeri 0,1,2,3,... ed ogni numero all'interno è somma dei due che gli stanno sopra. Sia $f(n)$ la somma dei numeri della riga che inizia con $n$. Qual è l'ultima cifra di $f(2003)$?

SVOLGIMENTO

Si puó definire ricorsivamente $f(n)$. Si ha $f(1)) = 2$, $f(2) = 6$, $f(3) = 14$ eccetera. Si nota che, ad esempio, in $f(4)$ tutti i numeri interni della riga 3 vengono contati 2 volte, mentre quelli sul bordo una sola volta, e in piú vengono aggiunti i numeri sul bordo della riga 4, quindi si ha

$$f(4) = 2f(3) + 2 * 4 - 2 * 3 = 2f(3) + 2.$$

In generale si ottiene

$$f(n) = 2f(n-1)+2 = 2(f(n-1)+1) = 2^2(f(n-2)+1) = ... = 2^{n-1}(f(1)+1) = 2^{n-1}*3.$$

con f(1)=2. Quindi abbiamo $f(2003) = 2^{2002} * 3$. Si vede come vanno le unitá delle potenze di 2 e si moltiplica per 3 il risultato trovato. Risultato 2.

## 1.6 Spendaccioni

Uno storico della cittá si accorge che il deficit di bilancio segue alcune regole curiose. Infatti, se chiamiamo $f(n)$ il deficit dell'anno $n$ dalla fondazione della cittá, allora $f(2n) = 2f(n) + 1$ ($f(0) = 0$). Quanto è il deficit al 1024-esimo anno dalla fondazione della cittá?

SVOLGIMENTO

Poiché $1024 = 2^{10}$, allora

$$f(1024) = f(2^{10}) = 2f(2^9)+1 = 2(2f(2^8)+1)+1 = \ldots = 2^{10}f(1)+\sum_{i=0}^{9} 2^i =$$

$$= 1024 + 1023 = 2047.$$

## 1.7 Missione strampalata

(candidato disfida) La squadra di Numeruto si trova ad affrontare una missione singolare. Devono considerare la successione di numeri naturali $a_1 = 1000$, $a_2 = x$, $a_3 = a_1 - a_2$,..., $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$. La successione termina al primo numero negativo. Quale valore di x dovrebbe rintracciare la squadra per ottenere la sequenza piú lunga?

SVOLGIMENTO

Costruiamo la successione:

$$a_1 = 1000, \qquad a_2 = x, \qquad a_3 = a_1 - a_2,$$

$$a_4 = a_2 - a_3 = 2a_2 - a_1,$$

$$a_5 = a_3 - a_4 = a_1 - a_2 - 2a_2 + a_1 = 2a_1 - 3a_2$$

$$a_6 = a_4 - a_5 = 5a_2 - 3a_1.$$

In generale si ottiene

$$a_n = (-1)^n (F_n a_2 - F_{n-1} a_1) = (-1)^n (F_n x - 1000\, F_{n-1}).$$

Per avere $a_n, a_{n+1} > 0$ deve essere, per n pari:

$$1000\frac{F_n}{F_{n+1}} > x > 1000\frac{F_{n-1}}{F_n}$$

Poiché

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \to \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

allora $x = 618$. Oppure provare a imporre la condizione fino al passo 11.

## 1.8 Un gruppo di amici

In una calda mattina di luglio, un gruppo di amici si scambia qualche SMS per decidere se andare o no al mare nel pomeriggio. Ecco i messaggi:

1. Giulia è innamorata di Andrea, quindi se Andrea va al mare, ci va anche Giulia;

2. Giulia o Federico vanno al mare, ma dopo la discussione dell'altra sera, se va uno non va l'altro;

3. Erica ha detto che oggi sta con Federico;

4. Qualcuno al mare ci sará senz'altro, Erica o Sara ci vanno;

5. Se Sara va al mare, ci vanno anche Andrea e Federico. Insomma, chi va al mare e chi no?

Per dare la risposta regolarsi come segue: associare ad ogni nome i seguenti numeri, Andrea= 300, Giulia= 400, Federico= 500, Erica= 2000, Sara= 1000. La risposta deve essere la somma dei numeri corrispondenti ai nomi di coloro che andranno al mare.

SVOLGIMENTO

Vedi file allegato pagina 17.

## 1.9

Dimostrare che $2^n > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

*Dimostrazione.* Induzione su $n$. Passo 0 ovvio. Vero per $n$ lo dimostriamo per $n+1$.

$$2^{n+1} = 2 * 2^n > 2n \geq n+1 \qquad \forall n \neq 0, 1.$$

□

## 1.10

Data la successione di interi definita da

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2$$

con $x_1 = 3$. Dimostrare che due termini distinti della successione sono primi tra loro.

*Dimostrazione.* I termini sono tutti dispari per induzione.
Si verifica facilmente che $x_n$ divide $x_{n+1} + 2$.
Si dimostra per induzione su $k$ che per $k > 1 :\ x_n$ divide $x_{n+k} - 2$.
Passo Base: $x_{n+2} - 2 = x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4$.
Passo induttivo: $x_{n+k+1} - 2 = x_{n+k}^2 - 4 = .(x_{n+k} - 2)(x_{n+k} + 2)$ da cui la tesi. □

### 1.11

Trovare un polinomio $P(n)$ che sia uguale a:

1. Somma dei numeri da 0 a n;
2. Somma dei quadrati da 0 a n;
3. Somma dei cubi da 0 a n.

SOLUZIONE:

A mano i ragazzi congetturano i seguenti polinomi e poi dimostrano per induzione:

1. $$\frac{n(n+1)}{2}$$
2. $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
3. $$(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

### 1.12 Einstein

In una strada ci sono 5 case dipinte di 5 colori differenti. In ogni casa vive una persona di differente nazionalitá. Ognuno dei padroni di casa beve una differente bevanda, fuma una differente marca di sigarette e tiene un animale differente. Domanda: a chi appartiene il pesciolino?

Indizi: 1. L'inglese vive in una casa rossa;

2. lo svedese ha un cane;
3. Il danese beve the;
4. La casa verde è all'immediata sinistra della casa bianca;
5. Il padrone della casa verde beve caffè;

6. La persona che fuma le Pall Mall ha degli uccellini;
7. Il proprietario della casa gialla fuma le Dunhill's;
8. L'uomo che vive nella casa centrale beve latte;
9. Il norvegese vive nella prima casa;
10. L'uomo che fuma le Blends vive vicino a quello che ha i gatti;
11. L'uomo che ha i cavalli vive vicino all'uomo che fuma le Dunhill's;
12. L'uomo che fuma le Blue Master beve birra;
13. Il tedesco fuma le Prince;
14. Il norvegese vive vicino alla casa blu;
15. L'uomo che fuma le Blends ha un vicino che beve acqua.

SOLUZIONE:

Per trovare una configurazione che rispetti le precedenti condizioni si fanno una tabella e provano provano provano..una configurazione possibile (forse l'unica) è quella in cui il tedesco ha il pesciolino.

## 1.13 Bionde

Trovare l'errore nella dimostrazione che segue:
Si pretende di dimostrare che tutte le ragazze sono bionde. Procediamo per induzione sul numero di ragazze dimostrando che, per ogni $n \geq 1$ , prese comunque $n$ ragazze, queste sono tutte bionde.
Assunto il fatto come vero nel caso di $n$ ragazze, deduciamo l'analogo con $n+1$ al posto di $n$ . Si prendano dunque $n+1$ ragazze qualunque $r_1, ..., r_{n+1}$. Si considerino le prime n , cioè $r_1, ..., r_n$ : per l'ipotesi di induzione queste sono tutte bionde. La stessa cosa avviene per le n ragazze $r_2, ..., r_{n+1}$ . Dunque tutte le $n + 1$ ragazze sono bionde. Il principio di induzione permette dunque di concludere.

E se si pretendesse nello stesso modo di dimostrare che ogni insieme con almeno una ragazza bionda è fatto di sole ragazze bionde?

SOLUZIONE:

Nel primo caso è falso addirittura il passo base. Nel secondo caso il passo induttivo è vero solo per $n > 1$.