Brescia, 13 Gennaio 2012

Allenamenti di matematica: Combinatoria e Probabilitá

1. ***Moneta sonante***
Si hanno 3 monete aventi facce di colori diversi: la prima ha due facce bianche, la seconda due facce nere e la terza una faccia bianca e una faccia nera.

   (a) Qual'é la probabilitá che lanciando una moneta a caso esca una faccia bianca?

   (b) E qual'é la probabilitá che con due lanci consecutivi di due monete scelte a caso tra le tre (dopo il primo lancio si inserisce la prima moneta) si ottenga la sequenza faccia bianca-faccia nera?

Dimostrazione. (a) Abbiamo 6 facce totali e 3 di queste sono bianche. Prendendo una moneta a caso abbiamo quindi che la probabilitá che esca una faccia bianca pari a $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(b) La probabilitá che il lancio dia una faccia nera é $\frac{1}{2}$. Abbiamo quindi che la sequenza faccia bianca - faccia nera, visto che sono due eventi indipendenti é: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

□

2. ***Estrazione juventina***
Ogni anno un gruppo di supporter juventini partecipa ad una lotteria autoprodotta. L'obiettivo é quello di estrarre dall'urna, rigorosamente in ques'ordine, prima una pallina nera e poi una pallina bianca. Dato che negli ultimi anni la lotteria era peró in perdita, uno degli ideatori decide di fare in modo che il gioco sia piú difficile e inserisce nell'urna 16 palline di cui 13 bianche e 3 nere.
Determinare la probabilitá che la prima pallina estratta sia nera e, senza reinserimenti, la seconda estratta sia bianca.

Dimostrazione. Chiamiamo con A l'evento in cui la prima pallina estratta é nera e B l'evento in cui la seconda pallina estratta é bianca. Le rispettive probabilitá saranno dati dal numero di eventi favoreli, fratto il numero di eventi possibili:

$$P_A = \frac{3}{16}$$

$$P_B = \frac{13}{15}$$

La probabilitá che i due eventi avvengano in sequenza é data dal prodotto delle probabilitá:

$$P(A \cap B) = \frac{3}{16} \cdot \frac{13}{15} = \frac{13}{80} \simeq 0,16$$

□

3. ***Affare! Brioches gratis!***
   In un paese, un fornaio provava a svendere le brioches avanzate dal giorno prima. Ad ogni aspirante acquirente dava in mano 2 dadi: se la somma dei dadi lanciati avesse fatto 4, avrebbe avuto 2 brioches gratis, se la somma dei dadi avesse fatto 11, ne avrebbe avute 2 ma 1 l'avrebbe dovuta pagare, con qualsiasi altro risultato avrebbe dovuto pagare il prezzo intero.

   (a) Qual'á la probabilitá di ricevere gratis 2 brioches?
   (b) Qual'é la probabilitá di pagarle a metá prezzo?
   (c) E la probabilitá di fare, comunque, un affare?

   Dimostrazione. Le coppie che si possono formare al lancio dei due dadi sono:
   (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)
   (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)
   (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)
   (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)
   (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)
   (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)

   (a) Le coppie di dadi che danno come somma 4 sono solo 3: (1,3),(2,2),(3,1). Abbiamo quindi che la probabilitá che si verifichi questo evento é data da:
   $$P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \simeq 0,08$$
   (b) Analogamente, le coppie di dadi che danno come somma 11 sono solo 2: (5,6),(6,5).
   $$P(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \simeq 0,06$$
   (c) Vediamo, infine, che il commerciante aveva trovato un buono specchietto per le allodole, la probabilitá di fare un affare é infatti data dalla somma delle due probabilitá precedentemente trovate:
   $$P(altro) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \simeq 0,14.$$

$\square$

4. ***Tagliatore di teste***
   Un drago ha 100 teste. Un cavaliere può staccare 15, 17, 20 o 5 teste con un solo colpo di spada. Ogni volta, peró, dalle spalle del drago ricrescono rispettivamente 24, 2, 14 e 17 nuove teste. Il drago muore solo se gli vengono staccate tutte le teste. Riuscirà il cavaliere ad uccidere il drago?

   Dimostrazione. No perchè il numero di teste è sempre $[1]_3$. $\square$

5. ***Scacchiera invariante***
   Data una scacchiera 8 per 8 con la classica colorazione (32 case bianche e 32 nere) sono consentite le seguenti mosse:

   (1) Ricolorare (ovvero cambiare di colore a) tutte le case di una riga o di una colonna.

   (2) Cambiare il colore a tutte le case di un quadrato 2×2.

   Posso rimanere con una sola casa nera e 63 bianche?

   Dimostrazione. No perché il numero di caselle nere (ma anche bianche) é invariante modulo 2. $\square$

6. ***Oggetti pesanti***
   Ci sono 128 oggetti di peso diverso, determinare il minimo numero di confronti da fare per trovare l'oggetto più pesante e il secondo più pesante.

   Dimostrazione. Si fa' come in Champions a eliminazione diretta per il primo, per il secondo si considerano solo i 7 oggetti eliminati dal vincitore. In totale sono 127 per il primo e 6 per il secondo. É inoltre facile verificare che sia il primo che il secondo devono necessariamente essersi confrontati con tutti gli altri (anche indirettamente attraverso la proprietá transitiva dell'ordinamento) e di conseguenza sono necessari 133 confronti. $\square$

7. ***Multipli***
   Quel é la probabilitá che, estratti due numeri a caso (anche uguali) compresi tra uno e dodici (estremi inclusi), il loro prodotto sia multiplo di 5?

Dimostrazione. Il prodotto non é multiplo di 5 se e solo se nessuno dei due numeri estratti é multiplo di 5 (poiché 5 é un numero primo). Gli unici multipli di 5 compresi tra 1 e 12 sono i numeri 5 e 10, pertanto la probabilitá che nessuno dei due numeri estratti sia multiplo di 5 é $\left(\frac{10}{12}\right)^2 = \frac{25}{36}$. La probabilitá cercata é quella del caso complementare, ed é dunque uguale a

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

□

8. ***Tombola al 7x5***
Prendendo un numerino della Tombola (vanno da 1 a 90) calcola la probabilitá che contenga la cifra 7 oppure che sia multiplo di 5.

Dimostrazione. I numerini della Tombola che contengono il 7 sono in tutto 18: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87. I numerini multipli di 5, del resto, sono anch'essi 18: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90.
Dovremo, ovviamente, prestare attenzione al fatto che 70 e 75 appartengono ad entrambi gli insiemi.

$$P(7) = \frac{18}{90} \ e \ P(5) = \frac{18}{90}$$

$$P(70, 75) = \frac{2}{90}$$

La probabilitá totale sará quindi data dalla somma delle prime due, meno il caso limite, in quanto caso di eventi compatibili.

$$P(totale) = P(7) + P(5) - P(70, 75) = \frac{34}{90} \simeq 0,37.$$

□

9. ***Tennis***
Due giocatori di pari livello disputano un incontro di tennis. Vince il giocatore che si aggiudica per primo tre partite. Qual é la probabilitÃ che si renda necessario disputar la bella (ovvero la quinta partita), supponendo che i risultati dei vari incontri siano eventi indipendenti?

Dimostrazione. Per la simmetria della situazione, possiamo senz'altro pensare che il giocatore A vinca la prima partita. Se A vince anche la seconda (fatto che succede con probabilitÃ $\frac{1}{2}$), per arrivare alla bella é necessario che B vinca le due partite successive, e questo succede con probabilitÃ $\frac{1}{4}$. Se invece la seconda partita viene vinta da B, ci si trova in paritá e possiamo supporre che la terza venga vinta da A, sempre grazie alla simmetria. Allora per arrivare alla bella é necessario che B vinca la quarta partita, e questo succede con probabilitÃ $\frac{1}{2}$. In definitiva i due giocatori arrivano alla bella con probabilitÃ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

dove il primo addendo corrisponde alla situazione in cui A vince le prime due partite, e il secondo addendo alla situazione in cui dopo due partite i due giocatori sono in paritá. Naturalmente si puó arrivare allo stesso risultato enumerando tutte le $2^5 = 32$ possibili situazioni che si possono verificare facendo 5 partite e osservando che in 12 di queste 32 si arriva alla bella. □

10. ***Compleanno***
A una festa di compleanno quattro giocattoli vengono estratti a sorte fra i tre ragazzi presenti. I sorteggi sono indipendenti, ovvero tutti i ragazzi partecipano a tutti i sorteggi. Qual Ã¨ la probabilitÃ che vi sia almeno un ragazzo che resta privo di giocattoli?

Dimostrazione. Un ragazzo resta privo di giocattoli se tutti e quattro i sorteggi lo escludono, e questo accade con una probabilitá del $\left(\frac{2}{3}\right)^4$. Sommando le probabilitá che ciascun ragazzo ha di restare privo di giocattoli si ottiene $3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$, ma in questo modo si contano due volte i casi in cui due ragazzi son restati entrambi privi di giocattoli (tutti i giocattoli sono andati al terzo). Questi casi hanno una probabilitÃ di accadere pari a $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$. Dunque il risultato cercato é dato da

$$3 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{1}{3}\right)^4 \right] = 3 \cdot \frac{15}{81} = \frac{5}{9}.$$

□

11. ***Permutazioni e paritá***
Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutazione di $1, \ldots, n$ con n dispari. Allora

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$$

é pari.

Dimostrazione. Poiché la cardinalitá dei numeri dispari é strettamente maggiore di quella dei numeri pari (in $1, \ldots, n$) esiste sicuramente$a_i = 1 = i(mod 2)$. □

12. ***Riunione all'ONU***
All'ONU é in corso una riunione e 3 americani, 4 francesi, 4 danesi e 2 italiani si devono sedere in una stessa fila di sedie, facendo in modo che persone della stessa nazionalitá siano sedute una vicina all'altra. In quanti modi si possono disporre? E se dovessero sedersi attorno ad un tavolo rotondo?

Dimostrazione. Nel primo modo abbiamo che il modo in cui si possono disporre le 4 nazionalitá, rispettivamente, é di 4!. Inoltre ciascuna persona di ogni nazione si puó rimescolare con le altre del suo paese (e mi da 3! per gli americani...etc). Dunque ho $3! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2 \cdot 4! = 165880$ modi possibili.
Se poi i delegati si devono sedere attorno ad un tavolo non mi interessa piú chi é il primo della fila, quindi ho $165880/4 = 41472$ modi diversi. □

13. ***Disposizione di Triangoli***
Silvia ha 2012 tessere identiche a forma di triangolo equilatero e vuole disporle sul tavolo senza sovrapporle in modo che ciascuna abbia esattamente 2 lati in comune con altre 2 tessere. Può riuscire nel suo intento?

Dimostrazione. La risposta è si. Lo si può provare per tutti i numeri pari ≥ 12. Facendo delle semplici prove, lo si vede per $n = 6$ (esagono regolare), per $n = 12$ (la catena lascia un buco triangolare in mezzo, è delle stesse dimensioni della tessera), e per $n = 14$ (stavolta la catena lascia un buco pari a 2 triangoli uno di pianco all'altro). Se ci concentriamo sul buco centrale si nota che se a questo ogni volta aggiungiamo un triangolo in modo che rimanga un poligono convesso, servono 2 tessere in più circondarlo con una tassellazione ammissibile (partendo dal caso $n = 12$, il primo con un buco centrale). Quindi la tassellazione richiesta è possibile per ogni n pari maggiore o uguale 12. □

14. ***Scacchiera colorata***
Sia data una scacchiera rettangolare 4×7 colorata casualmente con due colori (rosso e nero). Dimostrare che esiste un rettangolo coi quattro spigoli dello stesso colore (vedi figura)).
Bonus question: É vero anche per una scacchiera 4×6?

Dimostrazione. Senza perdita di generalitá abbiamo 14 caselle rosse. Abbiamo due righe (Wlog prima e seconda) con in totale almeno 8 caselle rosse (di cui al piú una sulla stessa colonna). Di conseguenza queste righe hanno esattamente 8 caselle rosse. Tra le altre righe ce ne

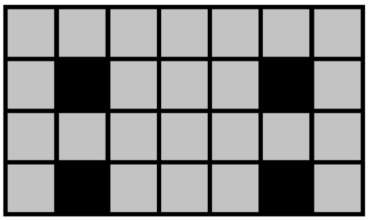

Figura 1: La scacchiera colorata. Esempio di rettangolo con spigoli dello stesso colore.

é una (la terza) con almeno 3 caselle rosse. Dividendo ora la terza riga in colonne tali che la prima riga ha una casella rossa o meno otteniamo che almeno due di queste caselle stanno nello stesso insieme.
Nel caso 6*4 la tesi diventa falsa e si puó costruire una tabella. □

15. ***Cena Insidiosa***
$2n$ ambasciatori sono stati invitati ad una cena. Ogni ambasciatore ha al più $n-1$ nemici (l'inimicizia é reciproca). Dimostrare che è possibile disporre gli ambasciatori ad un tavolo circolare in modo che nessuno sieda vicino ad un nemico.

Dimostrazione. Si dispongono gli ambasciatori casualmente. Nel caso ci sia una coppia di ambasciatori (A, B) nemici con B seduto alla destra di A, dobbiamo trovare una coppia (A', B') con B' alla destra di A' e tale che A' e B' siano amici rispettivamente di A e B. Per fare ciò possiamo, partendo da A, percorrere il tavolo in senso antiorario. Troveremo allora almeno n amici di A, e alla destra di questi ci sono almeno n posti. Poichè B ha al più $n-1$ nemici, allora almeno uno dei vicini destri degli amici di A è amico di B, quindi abbiamo la coppia (A', B') cercata. basta allora scambiare B con A'. Con un numero finito di passaggi si riesce a disporre gli ambasciatori come si vuole. □

16. ***Affettando torte..***

   (a) In quanti settori al max si puó dividere una circonferenza (o un piano) con n rette?

   (b) In quante regioni al max si puó dividere una torta (o lo spazio) con n piani ?

   (c) In quanti settori al max si puó dividere il piano con n circonferenze?

   (d) In quante regioni al max si puó dividere lo spazio con n sfere?

Dimostrazione. (a) Il max si ha quando non ci sono parallele e le rette incidono solo a due a due. Una retta n-esima incide con n-1 rette (se si vuole creare il max di settori ovviamente..). essa creerá: un nuovo settore (dividendo in due quello gia esistente) prima del primo pto di intersezione con altre rette, un altro dal primo al secondo e cosí via (non penso ci sia bisogno di indurre..mi pare abbastanza intuitivo) fino all'ultimo punto e un settore oltre l'ultimo punto di intersezione. Totale n nuovi settori. $F(n) = f(n-1) + n$ e con $f(0) = 1$;$f(n) = (\sum i) + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1$

(b) Il max di regioni se tt i piani sono incidenti, le rette di incidenza sono distinte, considerando le rette di incidenza su di un piano esse creano il numero massimo di settori(vedi esercizio precedente). Ogni piano n-esimo ha n-1 rette di intersezione con gli altri(se li interseca tutti e le rette sono distinte ovviamente..da cui le condizioni di partenza). Le rette di intersezione creano max $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ settori a cui corrisponde una regione dello spazio diversa (infatti due settori dello stesso piano non possono delimitare la stessa regione dello spazio se questa regione é convessa..e lo é assolutamente perché eventuali concavitá verrebbero tagliate dai piani di dimensione infinita)(in realtá le regioni che corrispondono ad uno stesso settore sono 2 una sopra e una sotto il piano). Inoltre un piano taglia in due tutte le regioni che interseca. Perció avendo $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ regioni subito sopra e $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ subito sotto vuol dire che tante ne ha intersecate e ne ha create tante di nuove.

$$F(n) = (\sum \frac{i(i-1)}{2} + 1) + 1 = \frac{2n^3 + 10n + 12}{12}$$

(c) il max si ottiene se le circonferenze incidono in 2 punti con tutte le altre e incidono solo due a due. Dopo ogni intersezione si taglia a metá un settore del piano: si crea un settore nuovo tra la prima e la seconda intersezione, e cosí via analogamente all'esercizio 1. dopo 2n-2(che é il massimo potendo intersecare in due punti n-1 altre cfr..) intersezioni (e 2n-3 settori creati visto che si creano dopo l'intersezione..) la cfr si chiude creando un altro settore. Totale settori creati: 2n-2

$$F(n) = f(n-1) + 2(n-1); f(1) = 2;$$

$$f(n) = (\sum (i-1)2) + 2 = n(n+1) - 2n + 2 = n^2 - n + 2$$

(d) Due sfere hanno in comune massimo una circonferenza; a ogni sezione in cui é divisa una sfera (analogamente all'esercizio precedente..) corrispondono due regioni del piano: una interna e una esterna alla sfera che sarebbero altrimenti unite. Quindi la sfera le ha tagliate a metá creandone tante nuove quante sono le sezioni in cui essa é divisa. Le sezioni sono create dalle circonferenze di incidenza con le altre sfere e sono max una con ciascuna altra. Un'n-esima sfera ha n-1 circonferenze di incidenza che se rispecchiano le condizioni dell'esercizio precedente formano: $(n-1)2-(n-1)+2 = n^2-3n+4$ sezioni nuove e quindi regioni nuove.

$$f(1) = 2; f(n) = n^2 - 3n + 4 + f(n-1) = (\sum_{i=2} i^2 - 3i + 4) + 2$$

e svolgendo le sommatorie:

$$\frac{2n^3 - 6n^2 + 16n}{6}$$

□

17. ***Convegno Linguistico***
Nove delegati vanno ad un convegno. Ciascuno parla al piú tre lingue e comunque presi tre delegati almeno due parlano la stessa lingua. Dimostrare che esiste una lingua parlata da almeno tre persone.

Dimostrazione. Sia la tesi falsa e wlog (a meno di trascurare le lingue parlate da una sola persona) ogni lingua parlata da esattamente 2 persone.
Possiamo quindi un grafo nel quale i vertici rappresentano le persone e gli archi le lingue:
Sia G un grafo di 9 vertici tale che:
1) i vertici siano di grado al massimo 3
2) comunque scelti 3 vertici c'é un arco tra essi.
Dalla [1] si ottiene che esistono due vertici non connessi tra di loro. Siano V1,V2 due vertici non connessi, per la [2] ogni altro vertice sará quindi connesso ad almeno uno di essi e la somma dei loro gradi é almeno $9-2=7>6$ ma ció contraddice la [1]. □