Brescia, 28 ottobre 2011

Allenamenti di matematica: Logica, Induzione e Ricorsione

1. ***Somme e Prodotti (medio)***
   Dimostrare che
   $$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$$

2. ***Somme di Fibonacci (medio)***
   Dimostrare che
   $$\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} = F_{2n+2}$$

3. ***Somme di Fibonacci la vendetta (medio)***
   Dimostrare che
   $$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

4. ***Punti nello spazio (difficile)***
   Consideriamo $2n$ punti nello spazio collegati da $n^2 + 1$ segmenti. Dimostrare che esiste almeno un insieme di 3 punti collegati a 2 a 2 da segmenti ($n \geq 2$).

5. ***Triangoli famosi (medio) candidato disfida***
   Nella piazza principale della cittá troneggia una stele di pietra. L'iscrizione della stele é un triangolo che ha sui lati i numeri 0,1,2,3,... ed ogni numero all'interno é somma dei due che gli stanno sopra. Sia $f(n)$ la somma dei numeri della riga che inizia con n. Qual é l'ultima cifra di $f(2003)$?

6. ***Atene o Roma? (facile)***
   Uno storico della cittá si accorge che il deficit di bilancio segue alcune regole curiose. Infatti, se chiamiamo $f(n)$ il deficit dell'anno n dalla fondazione della cittá, allora $f(2n) = 2f(n)+1$ ($f(0) = 0$). Quanto é il deficit al 1024-esimo anno dalla fondazione della cittá?

7. ***Differenze positive (medio), candidato disfida***
   La squadra di Numeruto si trova ad affrontare una missione singolare. Devono considerare la successione di numeri naturali $a_1 = 1000$, $a_2 = x$, $a_3 = a_1 - a_2$,..., $a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$. La successione termina al primo numero negativo. Quale valore di x dovrebbe rintracciare la squadra per ottenere la sequenza piú lunga?

8. ***Approcci complessati (facile)***
   In una calda mattina di luglio, un gruppo di amici si scambia qualche SMS per decidere se andare o no al mare nel pomeriggio. Ecco i messaggi:

1. Giulia é innamorata di Andrea, quindi se Andrea va al mare, ci va anche Giulia;

2. Giulia o Federico vanno al mare, ma dopo la discussione dell'altra sera, se va uno non va l'altro;

3. Erica ha detto che oggi sta con Federico;

4. Qualcuno al mare ci sará senz'altro, Erica o Sara ci vanno;

5. Se Sara va al mare, ci vanno anche Andrea e Federico. Insomma, chi va al mare e chi no?
Per dare la risposta regolarsi come segue: associare ad ogni nome i seguenti numeri, Andrea= 300, Giulia= 400, Federico= 500, Erica= 2000, Sara= 1000. La risposta deve essere la somma dei numeri corrispondenti ai nomi di coloro che andranno al mare.

9. ***Ora lo fate davvero.. (facile)***
Dimostrare che $2^n > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

10. ***Successioni invernali (difficile)***
Data la successione di interi definita da

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2$$

con $x_1 = 3$. Dimostrare che due termini distinti della successione sono primi tra loro.

11. ***Somme potenziali (facile) candidato disfida***
Trovare tre polinomi $P(n)$ che siano uguali rispettivamente a:

1. Somma dei numeri da 0 a n;

2. Somma dei quadrati da 0 a n;

3. Somma dei cubi da 0 a n.

12. ***Un villaggio particolare (medio)***
In una strada ci sono 5 case dipinte di 5 colori differenti. In ogni casa vive una persona di differente nazionalitá. Ognuno dei padroni di casa beve una differente bevanda, fuma una differente marca di sigarette e tiene un animale differente. Domanda: a chi appartiene il pesciolino?
Indizi: 1. L'inglese vive in una casa rossa;

2. lo svedese ha un cane;

3. Il danese beve the;

4. La casa verde é all'immediata sinistra della casa bianca;

5. Il padrone della casa verde beve caffé;

6. La persona che fuma le Pall Mall ha degli uccellini;

7. Il proprietario della casa gialla fuma le Dunhill's;

8. L'uomo che vive nella casa centrale beve latte;

9. Il norvegese vive nella prima casa;

10. L'uomo che fuma le Blends vive vicino a quello che ha i gatti;

11. L'uomo che ha i cavalli vive vicino all'uomo che fuma le Dunhill's;

12. L'uomo che fuma le Blue Master beve birra;
13. Il tedesco fuma le Prince;
14. Il norvegese vive vicino alla casa blu;
15. L'uomo che fuma le Blends ha un vicino che beve acqua.

13. ***Sempre detto che preferisco le More alle fragole.. (medio)***
Trovare lerrore nella dimostrazione che segue:
Si pretende di dimostrare che tutte le ragazze sono bionde. Procediamo per induzione sul numero di ragazze dimostrando che, per ogni $n \geq 1$, prese comunque n ragazze, queste sono tutte bionde.
Assunto il fatto come vero nel caso di n ragazze, deduciamo lanalogo con $n+1$ al posto di n . Si prendano dunque $n+1$ ragazze qualunque $r_1, ..., r_{n+1}$. Si considerino le prime n , cioé $r_1, ..., r_n$: per lipotesi di induzione queste sono tutte bionde. La stessa cosa avviene per le n ragazze $r_2, ..., r_{n+1}$. Dunque tutte le $n+1$ ragazze sono bionde. Il principio di induzione permette dunque di concludere.

E se si pretendesse nello stesso modo di dimostrare che ogni insieme con almeno una ragazza bionda é fatto di sole ragazze bionde?