La matematica non è un'opinione, lo è *oppure* ...?

Giulio Giusteri

Dipartimento di Matematica e Fisica
Università Cattolica del Sacro Cuore – Brescia

26 Febbraio 2010

Vecchie conoscenze

NON (A o B)

$\Updownarrow$

NON A e NON B

E	v	f
v	v	f
f	f	f

$\forall x \; P(x)$

$\exists y \; Q(y)$

O	v	f
v	v	v
f	v	f

P e NON P $\vdash$ 0 = 1 !

Dedurre . . . dedurre . . . dedurre.

Come li interpretiamo?

1. **Interpretazione linguistica.**

   Forse la più naturale, attribuisce ai connettivi logici e ai quantificatori il significato della loro espressione nel linguaggio usuale, cercando di produrre un modo di argomentare per cui le conclusioni risultino a tutti manifestamente vere e non solo convincenti.

Come li interpretiamo?

1. **Interpretazione linguistica.**
2. **Interpretazione informatica.**

   I connettivi logici vengono interpretati come operazioni binarie o unarie (NON) su un insieme di due elementi: $\{0, 1\}$ che rappresenta i valori $\{falso, vero\}$. I connettivi logici diventano circuiti elettronici che operano sulle stringhe di 0 e 1 con cui lavora un computer, riducendo ogni operazione logica, matematica o di qualunque livello all'aritmetica in base due.

Come li interpretiamo?

1. **Interpretazione linguistica.**
2. **Interpretazione informatica.**
3. **Interpretazione matematica.**

   Si cristallizza il significato letterale utilizzando le operazioni logiche per costruire ragionamenti rigorosi (dimostrazioni) che non lascino dubbi sul valore di verità delle affermazioni (teoremi), una volta accettati gli assiomi.

Come li interpretiamo?

1. **Interpretazione linguistica.**
2. **Interpretazione informatica.**
3. **Interpretazione matematica.**
4. **Interpretazione tipografica.**

   Si possono costruire regole puramente tipografiche per associare a stringhe elementari (assiomi) di caratteri che rappresentano connettivi, quantificatori, variabli, proposizioni, stringhe derivate valide (teoremi) da cui derivare ulteriori stringhe valide.

Come li interpretiamo?

1. **Interpretazione linguistica.**
2. **Interpretazione informatica.**
3. **Interpretazione matematica.**
4. **Interpretazione tipografica.**
5. **Interpretazione . . .**

Un'altra interpretazione

Vediamo ora un'interpretazione in chiave *costruttiva* di connettivi, quantificatori e implicazione.

Un'altra interpretazione

Vediamo ora un'interpretazione in chiave *costruttiva* di connettivi, quantificatori e implicazione.

- Una costruzione di A E B è una costruzione di A insieme ad una costruzione di B.

Un'altra interpretazione

Vediamo ora un'interpretazione in chiave *costruttiva* di connettivi, quantificatori e implicazione.

- Una costruzione di A E B è una costruzione di A insieme ad una costruzione di B.
- Una costruzione di A O B è una costruzione di A oppure una costruzione di B.

Un'altra interpretazione

Vediamo ora un'interpretazione in chiave *costruttiva* di connettivi, quantificatori e implicazione.

- Una costruzione di A E B è una costruzione di A insieme ad una costruzione di B.
- Una costruzione di A O B è una costruzione di A oppure una costruzione di B.
- Una costruzione di B SE A è una tecnica per convertire costruzioni di A in costruzioni di B.

Un'altra interpretazione

Vediamo ora un'interpretazione in chiave *costruttiva* di connettivi, quantificatori e implicazione.

- Una costruzione di A E B è una costruzione di A insieme ad una costruzione di B.
- Una costruzione di A O B è una costruzione di A oppure una costruzione di B.
- Una costruzione di B SE A è una tecnica per convertire costruzioni di A in costruzioni di B.
- Non c'è costruzione di $(0 = 1)$.

Un'altra interpretazione

Vediamo ora un'interpretazione in chiave *costruttiva* di connettivi, quantificatori e implicazione.

- Una costruzione di A E B è una costruzione di A insieme ad una costruzione di B.
- Una costruzione di A O B è una costruzione di A oppure una costruzione di B.
- Una costruzione di B SE A è una tecnica per convertire costruzioni di A in costruzioni di B.
- Non c'è costruzione di $(0 = 1)$.
- Definiamo NON A come $(0 = 1)$ SE A, cioè una costruzione di NON A è una tecnica per convertire costruzioni di A in assurdità.

Un'altra interpretazione

Vediamo ora un'interpretazione in chiave *costruttiva* di connettivi, quantificatori e implicazione.

- Una costruzione di A E B è una costruzione di A insieme ad una costruzione di B.
- Una costruzione di A O B è una costruzione di A oppure una costruzione di B.
- Una costruzione di B SE A è una tecnica per convertire costruzioni di A in costruzioni di B.
- Non c'è costruzione di $(0 = 1)$.
- Definiamo NON A come $(0 = 1)$ SE A, cioè una costruzione di NON A è una tecnica per convertire costruzioni di A in assurdità.
- Una costruzione di PER OGNI x A(x) è una regola che, assegnato un qualunque oggetto *n*, dà una costruzione di A(*n*).

Un'altra interpretazione

Vediamo ora un'interpretazione in chiave *costruttiva* di connettivi, quantificatori e implicazione.

- Una costruzione di A E B è una costruzione di A insieme ad una costruzione di B.
- Una costruzione di A O B è una costruzione di A oppure una costruzione di B.
- Una costruzione di B SE A è una tecnica per convertire costruzioni di A in costruzioni di B.
- Non c'è costruzione di $(0 = 1)$.
- Definiamo NON A come $(0 = 1)$ SE A, cioè una costruzione di NON A è una tecnica per convertire costruzioni di A in assurdità.
- Una costruzione di PER OGNI x A(x) è una regola che, assegnato un qualunque oggetto n, dà una costruzione di A(n).
- Una costruzione di ESISTE x A(x) è un oggetto n insieme ad una costruzione di A(n).

Che cosa cambia

L'espressione 'A *implica* B' significa ora che esiste una procedura di inferenza, cioè un modo di dedurre dalla proposizione A la proposizione B, che sia costruttiva. Ma le procedure classiche di inferenza logica non sempre sono valide da un punto di vista costruttivo.

Che cosa cambia

L'espressione 'A *implica* B' significa ora che esiste una procedura di inferenza, cioè un modo di dedurre dalla proposizione A la proposizione B, che sia costruttiva. Ma le procedure classiche di inferenza logica non sempre sono valide da un punto di vista costruttivo. Non valgono:

1. PER OGNI x (A O B) *implica* (ESISTE x A) O (PER OGNI x B)

Che cosa cambia

L'espressione 'A *implica* B' significa ora che esiste una procedura di inferenza, cioè un modo di dedurre dalla proposizione A la proposizione B, che sia costruttiva. Ma le procedure classiche di inferenza logica non sempre sono valide da un punto di vista costruttivo. Non valgono:

1. PER OGNI x (A O B) *implica* (ESISTE x A) O (PER OGNI x B)

Ogni sequenza di 10 cifre nello sviluppo decimale di π o è una stringa di 10 zeri o non lo è.

Che cosa cambia

L'espressione 'A *implica* B' significa ora che esiste una procedura di inferenza, cioè un modo di dedurre dalla proposizione A la proposizione B, che sia costruttiva. Ma le procedure classiche di inferenza logica non sempre sono valide da un punto di vista costruttivo. Non valgono:

1. PER OGNI x (A O B) *implica* (ESISTE x A) O (PER OGNI x B)
2. ... *implica* E O (NON E)

Che cosa cambia

L'espressione 'A *implica* B' significa ora che esiste una procedura di inferenza, cioè un modo di dedurre dalla proposizione A la proposizione B, che sia costruttiva. Ma le procedure classiche di inferenza logica non sempre sono valide da un punto di vista costruttivo. Non valgono:

1. PER OGNI x (A O B) *implica* (ESISTE x A) O (PER OGNI x B)
2. ... *implica* E O (NON E)

Esistono costruzioni di 'PER OGNI x (A O B)' che non producono costruzioni di '(ESISTE x A) O (PER OGNI x B)' e neppure di 'NON((ESISTE x A) O (PER OGNI x B))'.

Che cosa cambia

L'espressione 'A *implica* B' significa ora che esiste una procedura di inferenza, cioè un modo di dedurre dalla proposizione A la proposizione B, che sia costruttiva. Ma le procedure classiche di inferenza logica non sempre sono valide da un punto di vista costruttivo. Non valgono:

1. PER OGNI x (A O B) *implica* (ESISTE x A) O (PER OGNI x B)
2. . . . *implica* E O (NON E)
3. NON(NON P) *implica* P

Che cosa cambia

L'espressione 'A *implica* B' significa ora che esiste una procedura di inferenza, cioè un modo di dedurre dalla proposizione A la proposizione B, che sia costruttiva. Ma le procedure classiche di inferenza logica non sempre sono valide da un punto di vista costruttivo. Non valgono:

1. PER OGNI x (A O B) *implica* (ESISTE x A) O (PER OGNI x B)
2. . . . *implica* E O (NON E)
3. NON(NON P) *implica* P

Anche se potremmo non avere alcuna costruzione di P='E O (NON E)', possiamo sempre produrre una costruzione di 'NON NON(E O (NON E))'.

Che cosa cambia

Anche se potremmo non avere alcuna costruzione di P='E O (NON E)', possiamo sempre produrre una costruzione di 'NON NON(E O (NON E))'.

Che cosa cambia

Anche se potremmo non avere alcuna costruzione di P=‘E o (non E)’, possiamo sempre produrre una costruzione di ‘non non(E o (non E))’.

- Vogliamo una tecnica per convertire costruzioni di Q=‘non(E o (non E))’=non P in assurdità.

Che cosa cambia

Anche se potremmo non avere alcuna costruzione di P='E O (NON E)', possiamo sempre produrre una costruzione di 'NON NON(E O (NON E))'.

- Vogliamo una tecnica per convertire costruzioni di Q='NON(E O (NON E))'=NON P in assurdità.
- Una costruzione di Q è, per definizione, una tecnica per convertire costruzioni di P in assurdità.

Che cosa cambia

Anche se potremmo non avere alcuna costruzione di P=‘E O (NON E)’, possiamo sempre produrre una costruzione di ‘NON NON(E O (NON E))’.

- Vogliamo una tecnica per convertire costruzioni di Q=‘NON(E O (NON E))’=NON P in assurdità.
- Una costruzione di Q è, per definizione, una tecnica per convertire costruzioni di P in assurdità.
- Avendo questa tecnica, possiamo convertire costruzioni di E in assurdità, perché ogni costruzione di E dà una costruzione di P.

Che cosa cambia

Anche se potremmo non avere alcuna costruzione di P=‘E O (NON E)’, possiamo sempre produrre una costruzione di ‘NON NON(E O (NON E))’.

- Vogliamo una tecnica per convertire costruzioni di Q=‘NON(E O (NON E))’=NON P in assurdità.
- Una costruzione di Q è, per definizione, una tecnica per convertire costruzioni di P in assurdità.
- Avendo questa tecnica, possiamo convertire costruzioni di E in assurdità, perché ogni costruzione di E dà una costruzione di P.
- Quindi possediamo una costruzione di NON E.

$$\text{NON E} \quad = \quad \mathsf{E} \quad \longrightarrow \quad \mathsf{P} \quad \longrightarrow \quad (0 = 1)$$

Che cosa cambia

Anche se potremmo non avere alcuna costruzione di P=‘E $\textsc{o}$ ($\textsc{non}$ E)’, possiamo sempre produrre una costruzione di ‘$\textsc{non}$ $\textsc{non}$(E $\textsc{o}$ ($\textsc{non}$ E))’.

- Vogliamo una tecnica per convertire costruzioni di Q=‘$\textsc{non}$(E $\textsc{o}$ ($\textsc{non}$ E))’=$\textsc{non}$ P in assurdità.
- Una costruzione di Q è, per definizione, una tecnica per convertire costruzioni di P in assurdità.
- Avendo questa tecnica, possiamo convertire costruzioni di E in assurdità, perché ogni costruzione di E dà una costruzione di P.
- Quindi possediamo una costruzione di $\textsc{non}$ E.

$$\textsc{non}\ \mathsf{E} \quad = \quad \mathsf{E} \quad \longrightarrow \quad \mathsf{P} \quad \longrightarrow \quad (0 = 1)$$

- Infine otteniamo una costruzione di P=‘E $\textsc{o}$ ($\textsc{non}$ E)’, che per ipotesi può essere convertita in un’assurdità.

$$\mathsf{Q} \quad \longrightarrow \quad \textsc{non}\ \mathsf{E} \quad \longrightarrow \quad \mathsf{P} \quad \longrightarrow \quad (0 = 1)$$

Che cosa cambia

L'espressione 'A *implica* B' significa ora che esiste una procedura di inferenza, cioè un modo di dedurre dalla proposizione A la proposizione B, che sia costruttiva. Ma le procedure classiche di inferenza logica non sempre sono valide da un punto di vista costruttivo. Non valgono:

1. PER OGNI x (A O B) *implica* (ESISTE x A) O (PER OGNI x B)
2. ... *implica* E O (NON E)
3. NON(NON P) *implica* P

Catastrofe?

In matematica costruttiva non si possono effettuare dimostrazioni per assurdo, ma ogni dimostrazione è una procedura costruttiva e si può usare per produrre un algoritmo che "dia vita" all'enunciato del teorema.

Che cosa resta invariato

$$2 + 2 = 4$$

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\cdots\cdots$$

I numeri naturali sono stati fatti da Dio, il resto è opera dell'uomo.

– L. Kronecker

Che cosa resta invariato

$$2 + 2 = 4$$

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\cdots\cdots$$

I numeri naturali sono stati fatti da Dio, il resto è opera dell'uomo.

– L. Kronecker

Gli oggetti matematici dovrebbero essere sempre costruiti a partire dai numeri naturali e dalle loro proprietà. Quest'idea ritorna diverse volte nella storia della matematica, non solo costruttivista, ed è in questo senso che si vuole "dare vita" agli enunciati dei teoremi costruttivi.

Che cosa resta invariato

$$2+2=4$$

$$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$$

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\cdots\cdots$$

> *I numeri naturali sono stati fatti da Dio, il resto è opera dell'uomo.*
>
> – L. Kronecker

Gli oggetti matematici dovrebbero essere sempre costruiti a partire dai numeri naturali e dalle loro proprietà. Quest'idea ritorna diverse volte nella storia della matematica, non solo costruttivista, ed è in questo senso che si vuole "dare vita" agli enunciati dei teoremi costruttivi.

I teoremi costruttivamente validi sono tutti classicamente validi.
Un'affermazione classicamente falsa non può essere costruttivamente vera.

To contradict or not to contradict?

Esistono infiniti numeri primi.

To contradict or not to contradict?

Esistono infiniti numeri primi.

Supponiamo che ci sia soltanto un numero finito di primi $p_1, \ldots, p_n$ e consideriamo il numero $p = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$.
Essendo $p > 2$ esso ammette una scomposizione in fattori primi $p = q_1 \times \ldots \times q_k$ (al limite $p = q_1$ è primo); ma, poiché i primi p_i non sono divisori di p, i fattori q_j sono ulteriori numeri primi e ciò contraddice l'ipotesi.

To contradict or not to contradict?

Esistono infiniti numeri primi.

Supponiamo che ci sia soltanto un numero finito di primi $p_1, \ldots, p_n$ e consideriamo il numero $p = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$.
Essendo $p > 2$ esso ammette una scomposizione in fattori primi $p = q_1 \times \ldots \times q_k$ (al limite $p = q_1$ è primo); ma, poiché i primi p_i non sono divisori di p, i fattori q_j sono ulteriori numeri primi e ciò contraddice l'ipotesi.
ATTENTI AL CONTENUTO COMPUTAZIONALE: lasciando perdere le contraddizioni, abbiamo un algoritmo che, dato un qualunque insieme finito di numeri primi, ne produce uno nuovo;

To contradict or not to contradict?

Esistono infiniti numeri primi.

Supponiamo che ci sia soltanto un numero finito di primi $p_1, \ldots, p_n$ e consideriamo il numero $p = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$.
Essendo $p > 2$ esso ammette una scomposizione in fattori primi $p = q_1 \times \ldots \times q_k$ (al limite $p = q_1$ è primo); ma, poiché i primi p_i non sono divisori di p, i fattori q_j sono ulteriori numeri primi e ciò contraddice l'ipotesi.
Attenti al contenuto computazionale: lasciando perdere le contraddizioni, abbiamo un algoritmo che, dato un qualunque insieme finito di numeri primi, ne produce uno nuovo; in questo modo abbiamo dimostrato che

I numeri primi sono più di qualunque quantità assegnata di numeri primi.

Morale della favola

- Non si mette in discussione il valore di verità dei teoremi dimostrati non costruttivamente, né l'opportunità di esplorare in modo non costruttivo il mondo matematico.

- La matematica costruttiva vuole dare definizioni e dimostrazioni basate su procedure che rendano esplicito il significato delle affermazioni.

- Dai teoremi costruttivamente dimostrabili si ottengono sempre algoritmi, che sono la base per effettuare i calcoli, quando servono, e per farli eseguire ai computer, quando è meglio.