

Allenamenti di matematica: simulazione della disfida

Le risposte vanno indicate con numeri di 4 cifre; se la risposta contenesse più di 4 cifre, andranno indicate solo le ultime 4. Se la risposta contenesse meno di 4 cifre è necessario anteporre la cifra 0 quante volte occorre. Se il quesito non ha soluzione unica la risposta deve essere 9999.

1. L'area.

Calcolare l'area della regione del piano cartesiano delimitata da $2|x| + |y| \leq 2$. (20 PUNTI)

2. Le terne.

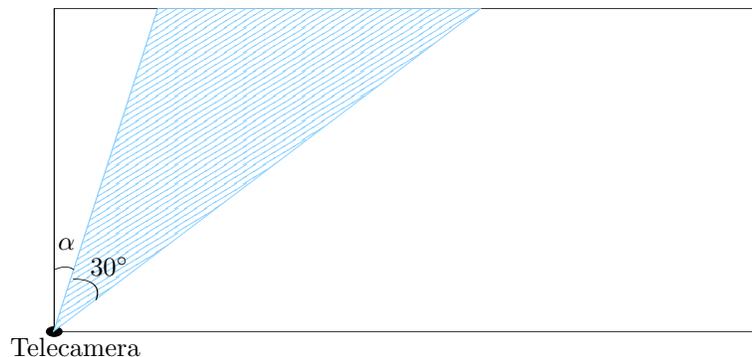
Quante sono le terne ordinate (a, b, c) di numeri interi positivi, distinti da 1, tali che $abc = 7^{39}$? (20 PUNTI)

3. Il torneo di calcio.

A un torneo di calcio partecipano 8 classi. Ogni classe presenta 3 squadre: gli esperti, i forti e i furbi. Quando due classi si incontrano, ognuna delle squadre di una classe gioca una volta contro la squadra dello stesso livello dell'altra classe: gli esperti contro gli esperti, i forti contro i forti, i furbi contro i furbi. Quante partite verranno giocate se ogni classe incontra ognuna delle altre classi? (20 PUNTI)

4. Il Grande Porcello.

Winston O. Snowball è uno dei produttori della trasmissione televisiva cult del momento, il Grande Porcello. Nella casa del Grande Porcello c'è un cortile rettangolare con i lati di $12\sqrt[4]{3}$ e $12\sqrt[4]{27}$ in cui scorrazzano liberamente i suini, e, in uno degli angoli di tale cortile, è posta una telecamera mobile, che ha un angolo di visuale di 30° . La telecamera può ruotare su se stessa descrivendo un angolo α compreso tra 0° e 30° (vedi figura). Solo dopo l'inizio delle trasmissioni, però, Snowball si rende conto che in ogni istante buona parte del cortile rimane scoperta dalla telecamera. Quanto vale, al massimo, la parte di cortile sorvegliata contemporaneamente dalla telecamera? (20 PUNTI)



5. **La frazione.**

Siano a e b due numeri reali distinti tali che

$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2.$$

Determinare il valore di $\frac{45a}{2b}$. (20 PUNTI)

6. **Il triangolo equilatero.**

Un punto P , interno ad un triangolo equilatero di lato ℓ , dista dai tre vertici rispettivamente 3, 4 e 5. Quanto vale $(\ell^2 - 25)\sqrt{3}$? (50 PUNTI)

7. **Il numero misterioso.**

Un insegnante scrive sulla lavagna un intero positivo minore di 50 000. Uno studente afferma che sia un multiplo di 2; un secondo studente afferma che sia un multiplo di 3; e così avanti fino al dodicesimo studente che indica il numero come multiplo di 13. L'insegnante osserva che tutti eccetto due tra gli studenti hanno ragione e che i due studenti che sono in errore hanno parlato uno immediatamente dopo l'altro. Qual è il numero scritto sulla lavagna? (20 PUNTI)

8. **Il perimetro.**

Dato un rettangolo di area 900, minimizzare il perimetro. (50 PUNTI)

9. **Gli interi.**

Per quanti interi positivi m il numero

$$\frac{2010}{m^2 - 2}$$

è un intero positivo? (50 PUNTI)

10. **La radice del problema.**

Calcolare la seguente somma:

$$\sum_{h=1}^{10000} (-1)^h \left[\sqrt{h} \right],$$

dove il simbolo $\left[\sqrt{h} \right]$ denota la parte intera della radice quadrata di h , quindi il più grande intero minore o uguale a \sqrt{h} . (50 PUNTI)

11. **Il gioco delle coppie.**

Sei mariti e sei mogli partecipano ad un party. Alcuni degli invitati stringono la mano ad altri invitati, ma mai al proprio consorte. Uno di essi chiede a tutti gli altri quante strette di mano hanno ricevuto nel corso della serata, ottenendo undici risposte diverse. Quante mani ha stretto sua moglie? (50 PUNTI)

12. **Un quadrato perfetto.**

Trovare il minimo valore di $n > 1$ intero per cui

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n}$$

è un quadrato perfetto. (50 PUNTI)

13. **Le monete.**

Di 201 monete all'apparenza tutte uguali, una ha un peso leggermente superiore a quello delle altre. Se abbiamo a disposizione una bilancia a due piatti, qual è il minimo numero di pesate necessarie per individuare la moneta più pesante? (50 PUNTI)

14. **I matematici ribelli.**

Dopo una retata di matematici ribelli, rei di aver tramato contro il re, tredici di loro vengono condannati a morte. Ma il re, appassionato di problemi matematici, propone loro una sfida: “Dopo che vi sarete messi in fila, uno davanti all’altro, dal più alto al più basso, in modo che ognuno di voi possa vedere le persone che ha davanti a sé, farò tracciare sulla vostra testa una croce gialla o rossa, partendo da quello più alto della fila, che ha dodici teste davanti a sé. Voi non potete girarvi indietro, e non conoscete quindi il colore della croce che avete in testa, né quello delle persone che sono dietro di voi. Sempre partendo dal più alto della fila, dovrete poi dirmi il colore della croce che avete in testa, e io grazierò tutti quelli che avranno indovinato. Dovrete quindi rispondere soltanto ‘giallo’ o ‘rosso’. Chi bara o chi si volta indietro verrà immediatamente giustiziato”. I condannati avevano già sentito parlare di questo rituale delle croci, al quale erano stati sottoposti altri condannati prima di loro, e così, prima di presentarsi davanti al re, avevano avuto tutto il tempo per accordarsi, in modo da salvare la vita al maggior numero di persone. Supponendo che essi abbiano trovato la strategia migliore, quanti di loro saranno sicuramente salvi? (50 PUNTI)

15. **Un numero primo.**

È stato recentemente mostrato che $2^{(2^{24})} + 1$ non è un numero primo. Trovate le due cifre finali di questo numero. (80 PUNTI)

16. **Rombi e cerchio.**

Minimizzare l’area dei rombi circoscritti a un cerchio di raggio 6. (80 PUNTI)

17. **Le nonne.**

Nel paese della matematica ogni bambino ha la fortuna di avere le sue due nonne ancora vive. Inoltre ogni bambino ha almeno una nonna in comune con ognuno degli altri bambini. Conoscendo solo il numero dei bambini si può affermare che una nonna ha almeno 12 nipoti ma non che una nonna ha almeno 13 nipoti. Quanti bambini ci sono nel paese della matematica? (80 PUNTI)

18. **La poligonale.**

Qual è il minimo valore di n per il quale è possibile costruire una poligonale chiusa piana formata da n lati di lunghezza 1, 2, ..., n (proprio in questo ordine) in modo che lati adiacenti siano perpendicolari fra loro? (80 PUNTI)

19. **Il polinomio.**

Un polinomio $P(x)$, di grado 22, soddisfa l’equazione

$$P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1).$$

Quanto vale $P(1)$? (80 PUNTI)

20. **I sottoinsiemi speciali**

Considerate l’insieme $\{1, 2, \dots, 151\}$ dei primi 151 interi maggiori di zero. Tra tutti i suoi sottoinsiemi, volete sceglierne alcuni in modo che l’intersezione fra due qualunque di quelli che avete scelto sia costituita o da un numero solo o da una sequenza di numeri consecutivi. Condizione soddisfatta, ad esempio, da entrambe le coppie di insiemi $(\{1, 2\}, \{2, 3\})$ e $(\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\})$, ma non dalle coppie $(\{1, 2\}, \{3, 4\})$ o $(\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\})$. Quanti sottoinsiemi potete scegliere al massimo? (80 PUNTI)