Università di Genova

Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero compreso tra 0 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\sqrt{3} = 1{,}7321$ $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$ $\pi = 3{,}1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista).
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Grand Tour d'Italie

Università di Genova

26 marzo 2021

Gara a Squadre – Testi dei problemi[1]

1. *Alla Vitrifrigo Arena* — Silvia Sconza

Giacomo (*Entrando alla Vitrifrigo Arena, per assistere al concerto insieme a Filippo*) Il palazzetto ha 10323 posti a sedere, numerati a partire dall'1.

Filippo (*Guardando il numero del suo posto a sedere scritto sul biglietto*) Ci sono esattamente 29 posti a sedere numerati con un multiplo del numero del mio posto.

Giacomo Escluso il tuo?

Filippo No, incluso il mio. E il numero del mio posto non è neppure primo.

Voce fuori campo QUANTI SONO I POSSIBILI NUMERI DEL POSTO A SEDERE DI FILIPPO?

2. *Casa Scaccabarozzi* — Sandro Campigotto

Alberto Eccola! Casa Scaccabarozzi, nota a noi torinesi come Fetta di polenta. La sua particolarità e l'origine del suo soprannome risiedono nel suo color giallo ocra, ma soprattutto nella singolare pianta trapezoidale e nello spessore molto sottile dell'edificio che la rendono simile a una "fetta di polenta".

Riccardo Diciamo che la sua pianta è un trapezio rettangolo $ABCD$ con base maggiore AB. Considera il punto E sull'altezza AD tale che l'angolo $\widehat{CEB}$ sia retto. Sapendo che la somma dei quadrati delle lunghezze dei segmenti AE e CD è $11{,}22\,\mathrm{m}^2$ e la somma dei quadrati delle lunghezze dei segmenti ED e AB è $14{,}79\,\mathrm{m}^2$, quanti millimetri misura il lato obliquo BC?

Alberto Ma come fai a conoscere quelle misure della Fetta di polenta!

3. *In Carnia* — Sandro Campigotto

Alessandro (*Camminando davanti al gruppo, lungo un sentiero che si inerpica in mezzo alle belle montagne della Carnia*) Luigi, vai avanti. A ogni bivio, indica la direzione da tenere per arrivare in cima al Col Quaternà.
Luigi affretta il passo lasciandosi alle spalle il resto del gruppo.

Luigi (*Arrivando in cima al Col Quaternà*) Accidenti! Le biforcazioni erano 10, ma io ho ancora 3 segnali indicatori in tasca.
Affranto. Lo sapevo che non dovevo distrarmi a guardare il panorama, ma è così bello! Però, è abbastanza evidente da che parte è la cima.
Rincuorato. Valuto che a ogni biforcazione priva del segnale il gruppo ha una probabilità di sbagliare sentiero del 20%.

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ PERCENTUALE CHE IL GRUPPO RIESCA AD ARRIVARE IN VETTA IN BASE ALLA VALUTAZIONE DI LUIGI?

4. *A Potenza* — Sandro Campigotto

Paolo è venuto a prendere il suo amico Andrea che sta arrivando alla stazione di Potenza Centrale.

Andrea Ciao, Mario! Quanti sono i numeri n interi positivi fino a 2021 tali che i numeri n^2 e n^3 sono entrambi somma di n numeri interi positivi consecutivi?

Paolo Ma è mai possibile che ogni volta che arrivi tu mi debba porre un quesito che riguarda le potenze dei numeri? Comunque, intendi 2021 incluso?

Andrea Sì!

Paolo Allora so la risposta!

---

[1] In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore.

5. *Villa Feltrinelli* — Lorenzo Mazza

Carlo (*Seduto in riva al lago nel giardino della villa*) Vi propongo un gioco mentre aspettiamo il traghetto per Riva. Ciascuno di voi pensi a un numero intero positivo. Emilia, dimmi che numero hai pensato. (*Emilia lo sussurra a Carlo in modo che Silvio non senta.*) Silvio, dimmi che numero hai pensato. (*Silvio fa come Emilia.*) Ora scrivo su questo foglietto la somma dei due numeri, su quest'altro foglietto il prodotto dei due numeri. Poi ne scelgo uno a caso e ve lo mostro. Chi mi sa dire che numeri avete pensato?

Silvio C'è scritto 4000. Non so dire che numero ha pensato Emilia.

Emilia Neppure io so dire che numero ha pensato Silvio.

Voce fuori campo CHE NUMERO HA PENSATO EMILIA?

6. *La Thuile* — Andrea Giusto

Vlada sta sciando a La Thuile. Scende dalla seggiovia e si dirige verso la Berthod, la pista più pendente d'Italia, ma alla partenza della stessa un maestro di sci le sbarra la strada.

Maestro Ferma! Dove vorresti andare?

Vlada Mi scusi, volevo solo godermi una sciata.

Maestro Ah, non lo sai? Da quest'anno per preservare la neve su questa pista abbiamo deciso di contingentarne l'ingresso: potrà accedervi solo chi saprà rispondere correttamente ad un quesito matematico.

Vlada (*Incuriosita da questa situazione*) Avanti allora, sono pronta a rispondere!

Maestro (*Assume un'aria serissima*) Siano (a_n) e (b_n) due successioni definite per ricorrenza tali che $a_0 = 5$, $a_{n+1} = a_n \cdot b_n$, $b_0 = 1$ e $b_{n+1} = b_n + n + 1$. Qual è il resto di a_{2021} nella divisione per 6?

Vlada Accidenti, è più difficile di quanto pensassi!

7. *A Bari* — Sandro Campigotto e Giuseppe Rosolini

Alessandra entra in una boutique del centro e chiede al commesso di consigliarle un sandalo per la bella stagione ormai alle porte.

Commesso (*Prendendo in mano un sandalo e un laccio*) Le consiglierei questo modello: ha 3 asole a destra e 3 a sinistra e lo può chiudere con questo laccio.

Alessandra Che strano: il laccio ha un'estremità blu e un'estremità arancione.

Commesso Sono colori combinati.

Alessandra Ci sono delle indicazioni su come sistemare il laccio?

Commesso Deve passare il laccio attraverso tutte le asole. Può entrare in un asola da sopra o da sotto, e alla fine l'allacciatura può non essere simmetrica. Ma deve far sì che le due estremità del laccio escano dalle asole più alte e che il laccio passi direttamente da un'asola più bassa all'altra più bassa.

Alessandra Cioè senza passare prima in un'altra asola a un livello diverso? (*Il commesso annuisce*) Bene: mi piacciono; li prendo!

Voce fuori campo IN QUANTI MODI ALESSANDRA PUÒ ALLACCIARE UNO DEI SANDALI SECONDO LE INDICAZIONI DEL COMMESSO?

8. *Sullo Stretto* — Lorenzo Mazza

Martina e Enrico hanno appena comprato casa a Reggio Calabria, con vista sullo Stretto.

Martina Siamo stati fortunati a trovare questa casa a un così buon prezzo!

Enrico Già, peccato che i pavimenti della sala e della cucina siano completamente da ripiastrellare.

Martina Non ti preoccupare, ho già parlato con un piastrellista—gira voce che sia il migliore in città. Ha detto che però per le sue piastrelle rettangolari può utilizzare tagli soltanto di valori interi (positivi) di centimetri.

Enrico Taglierebbe piastrelle anche con valori negativi o nulli...

Voce fuori campo SAPENDO CHE LE DUE STANZE HANNO DIMENSIONI $2{,}61\,\mathrm{m} \times 2{,}64\,\mathrm{m}$ E $2{,}38\,\mathrm{m} \times 2{,}79\,\mathrm{m}$, QUAL È IL PERIMETRO DELLE MATTONELLE DI AREA MASSIMA CHE PERMETTONO DI RICOPRIRE I DUE PAVIMENTI SENZA SPRECHI?

9. *A Bronte* — Silvia Sconza

Paolo e Lorenzo, grandi amanti del pistacchio, in vacanza a Catania non possono permettersi di non visitare Bronte per fare scorta della rinomata crema al pistacchio verde di Bronte DOP.

Lorenzo Hai notato che 2021 è dato dalla giustapposizione di due numeri di due cifre consecutivi presi in ordine crescente, 20 e 21?

Paolo Interessante! Facciamo un gioco: ti regalerò un vasetto di crema al pistacchio se saprai dirmi quanti sono i numeri, di esattamente sei cifre, non divisibili né per 2 né per 5 né per 11 che sono dati dalla giustapposizione di tre numeri, di due cifre ciascuno, consecutivi e presi in ordine crescente.

Lorenzo Quindi 70809 posso considerarlo accettabile se lo scrivo con uno zero davanti?

Paolo No, la cifra principale deve essere diversa da zero.

Lorenzo Ma allora è ancora più facile!

10. *I cauciuni* — Silvia Sconza

Jacopo è a Fornelli a trovare Riccardo che gli sta insegnando la ricetta originale dei cauciuni.

Riccardo Preparato l'impasto, ora dobbiamo occuparci del ripieno. Mi hanno detto che sei appassionato di problemi matematici, quindi te ne propongo uno: la quantità, in grammi, di ceci che dobbiamo mettere è pari a $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$ dove a, b, c, d e e sono le radici del polinomio $x^5 - 17x^4 + 102x^3 - 260x^2 + 264x - 84$.

Jacopo Divertente!

Voce fuori campo Quanti grammi di ceci dovranno usare?

11. *Lago Albano* — Lorenzo Mazza

Vlada e Matteo si trovano a Roma e decidono di approfittare della bella giornata per percorrere in bici il perimetro del lago Albano.

Vlada (*Dopo una lunga pedalata*) Sono stanchissima, quanti metri abbiamo percorso?

Matteo Abbiamo percorso tanti metri quanto il valore intero più grande del numero $\dfrac{x^2 + xy + y^2}{10}$ ottenuto usando numeri interi positivi x e y, e che sia minore o uguale a 9999.

Vlada Ma che numero è?

12. *Il Sentiero Azzurro* — Lorenzo Mazza e Giuseppe Rosolini

Sul Sentiero Azzurro, che collega Monterosso a Riomaggiore, Ludovica e Stefano, per non pensare alla fatica del trekking, si pongono a vicenda problemi matematici.

Ludovica Tra i numeri positivi k inferiori di 9999, qual è il più grande tale che il massimo comun divisore tra $(k^{2021} - 1)$ e $(k^{2020} - 1)$ è 2021?

Stefano (*Asciugandosi il sudore dalla fronte*) Certamente, è…

13. *A Villasimius* — Andrea Giusto

Simone (*Passeggiando su una lunga spiaggia di Villasimius*) Guarda quante persone.

Mara Sono 2021.

Simone Come fai a saperlo?

Mara Non vedi? Ciascuna di loro ha scritto sulla maglietta una frase del tipo "n di 2021". Fanno parte di una società dove ogni socio dice sempre la verità oppure mente sempre. Sono divisi in 4 gruppi: il gruppo A, dove stanno i soci con numero pari minore di 1011; il gruppo B, con i soci con numero dispari minore di 1010; il gruppo C che consiste dei soci con numero pari maggiore di 1011; infine il gruppo D con i soci con numero dispari maggiore di 1010. Ascolta: stanno per parlare.

Socio con la scritta 1 di 2021 I soci con un numero multiplo del mio mentono sempre.

Socio con la scritta 2 di 2021 I soci con un numero multiplo del mio dicono sempre la verità.

Socio con la scritta 2020 di 2021 I soci con un numero pari dicono sempre la verità.

Socio con la scritta 2021 di 2021 I soci che dicono il vero sono più numerosi dei soci che dicono il falso.

Simone Incredibile: tutte le persone nello stesso gruppo hanno fatto la stessa affermazione!

Voce fuori campo Qual è la somma tra il massimo numero possibile di soci che dicono la verità e il minimo possibile?

14. *Cima Blockhaus* ________ Sandro Campigotto

Dopo aver percorso una delle salite più impegnative d'Italia, Giuseppe e Giulio hanno raggiunto Cima Blockhaus, nel cuore dell'Appennino abruzzese.

Giuseppe Mentre pedalavo mi è venuto in mente un problema di geometria. Lo vuoi sentire?

Giulio (*Scendendo dalla bicicletta*) Sì, ho bisogno di fermarmi un attimo per riposare le gambe.

Giuseppe Un parallelepipedo retto a base quadrata di lato 50 cm è appoggiato su un piano inclinato di 30°. Qual è la massima altezza in millimetri che può avere per non ribaltarsi, cioè in modo che la perpendicolare verticale dal baricentro non sia esterna alla base inferiore?

Giulio Il parallelepipedo è di materiale omogeneo?

Giuseppe Certo!

15. *Sul lago di Braies* ________ Sandro Campigotto

Francesco e Simone, in gita sul lago di Braies, decidono di fare come la maggior parte degli altri turisti e noleggiano una barca a remi per fare il giro del lago.

Simone (*Indicando una scritta incisa nella barca*) Che cos'è quello?

Francesco (*Si mette gli occhiali*) Ha tutta l'aria di essere un problema.

Simone Cosa dice?

Francesco C'è scritto: "Quanto vale $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ dove a e b sono le due radici del polinomio $x^2 - 2207x + 1$?"

Simone Già che ci siamo possiamo anche provare a risolverlo...

16. *Porto Garibaldi* ________ Sandro Campigotto

Corinna e Paola si stanno rilassando sulla spiaggia a Porto Garibaldi.

Corinna (*Estraendo un mazzo di carte dallo zaino*) Il mazzo che ho in mano contiene un certo numero di carte, diciamo n. Ciascuna carta è numerata con un numero a partire da 1 fino a n, appunto. Suddividilo in quattro mazzetti secondo queste regole:

1. ogni carta deve essere in uno (e uno solo) dei mazzetti;
2. presi due mazzetti qualsiasi, la somma dei numeri sulle carte presenti in uno deve essere uguale alla somma dei numeri sulle carte nell'altro;
3. in uno dei quattro mazzetti tutte le carte devono essere numerate con un multiplo di 4.

Paola Bello! Riesco a farlo anche senza sapere quante carte sono!

Corinna Hai ragione! In effetti, il numero di carte che stiamo usando è il minimo n che mi permette di effettuare una suddivisione seguendo le regole che ti ho detto.

Voce fuori campo QUANTO VALE n?

17. *A Murano* ________ Matteo Di Domenico

In un laboratorio, un artista del vetro è al lavoro. Partendo da un cilindro di vetro ancora incandescente e malleabile, pone una borsella, una pinza molto particolare, a metà dell'altezza e, ruotando, inizia a stringere generando un cerchio parallelo alle due basi del cilindro iniziale e con centro sul segmento che congiunge i centri delle basi del cilindro.

Maestro Vetraio Vedete, non lo allungo. Riduco il raggio nel mezzo e aumento quello della base inferiore per mantenere costante l'altezza del solido, oltre ovviamente al volume.

Alessandro Potrebbe fare in modo che il raggio centrale alla fine sia due terzi di quello della base superiore, quella che rimarrà invariata per intenderci.

Maestro Vetraio Ha le idee chiare lei! Se mi aiuta le regalo il risultato: mi calcoli il rapporto tra il raggio inferiore e il raggio superiore che devo ottenere alla fine della plasmazione.

[*Dare come risposta il risultato moltiplicato per 1000.*]

18. *Al San Carlo* ________ Elena Espa

Il Teatro San Carlo riapre le porte al pubblico con un evento speciale.

Maschera Potranno accedere allo spettacolo solo coloro che conoscono il codice di accesso!

Giamila In che cosa consiste?

Maschera Il codice è di 5 cifre il prodotto delle quali è 108.

Andrea (*Rivolto a Marco*) Queste informazioni non sono sufficienti per determinare il codice.

Giamila Neppure per indovinarlo! I codici determinati da queste condizioni sono tantissimi!

Andrea Beh, non proprio tantissimi!

Voce fuori campo QUANTI SONO I CODICI DETERMINATI DALLE CONDIZIONI RIFERITE DALLA MASCHERA?

19. ***Una passeggiata*** — Giuseppe Rosolini

Domenico L'Adenovirus1554 (A1554) ha uno strano comportamento: incontrando una persona ammalata di A1554 non c'è rischio di infezione; incontrando una coppia di persone ammalate di A1554 il rischio di infezione è del 50%.

Daniele Sono appena arrivato a Milano e ho fatto una passeggiata sui Navigli: ho incontrato esattamente 6 coppie di persone. Qual è la probabilità che io abbia contratto l'A1554?

Domenico Beh, lo si prende abbastanza facilmente: qui 1 persona su 2 è ammalata di A1554.

Daniele Vuoi dire che c'è una probabilità del 50% che tu sia ammalato?

Domenico Sì!

Voce fuori campo Quali sono, in ordine, le prime quattro cifre dopo la virgola della probabilità che Daniele abbia contratto l'Adenovirus1554 passeggiando sui Navigli?

20. ***A Pienza*** — Sandro Campigotto e Giuseppe Rosolini

Carlo (*In Piazza Pio II*) Chiediamo a quella signora di fare una foto a tutto il nostro gruppo?

Silvano D'accordo. Siamo in dieci, siamo tutti di altezze diverse: cerchiamo di disporci in modo da essere tutti visibili.

Carlo Ci mettiamo su due file di cinque: in ogni fila mettiamo il più alto della fila al centro e gli altri a decrescere verso l'esterno.

Silvano Però dobbiamo assicurarci che quelli della fila anteriore non coprano quelli della fila posteriore. Quelli nella stessa posizione sulle due file sono in ordine crescente di fronte all'obiettivo: quello nella fila posteriore è più alto di quello nella fila anteriore.

Roberto Vuoi dire che, se ad esempio tu e io siamo nella quinta posizione delle due file. Tu, che sei più basso di me, sei nella fila davanti; io, che sono più alto di te, sono nella fila dietro.

Silvano Sì!

Patrizio (*Indicando Roberto*) Però, in quella posizione ci voglio stare io.

Roberto Vuoi dire nella quinta posizione a partire da sinistra nella fila posteriore?

Patrizio Sì!

Pino (*A Roberto, sorridendo*) Non c'è problema! Tanto nel gruppo ce ne sono proprio due più alti di Patrizio. E così c'è un solo modo per organizzare la posa per la foto.

Carlo (*Stupito*) Ma non è vero!

Voce fuori campo In quanti modi si può organizzare il gruppo per la foto a soddisfare le condizioni richieste da Silvano e Patrizio?

21. ***Eurochocolate*** — Sandro Campigotto

Sara e Matteo sono all'Eurochocolate di Perugia, il Festival del cioccolato più grande d'Europa.

Sara (*Osservando una clessidra di vetro contenente cioccolato fuso*) Quella strana clessidra è formata da due coni di ugual base e di altezza 15 dm ciascuno.

Matteo Ora è a riposo: il cono inferiore è pieno fino al vertice.

Sara La stanno girando: a che altezza in decimetri si troverà il cioccolato nel cono inferiore quando i due coni ne conterranno la stessa quantità?

[*Dare come risposta il risultato moltiplicato per* 1000]

Gara di matematica a squadre 2021
Soluzioni

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, insieme a Sandro Campigotto, Simone Di Marino, Lorenzo Mazza, e Francesco Veneziano, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Andrea Cogorno, Matteo Di Domenico, Elena Espa, Andrea Giusto, Matteo Littardi, Cecilia Oliveri, Luca Renzi, Silvia Sconza, Marco Veneriano.
Sono tutti ex-giocatori iscritti a corsi di studi presso la Scuola di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali dell'Università di Genova.

Soluzione del problema 1. I numeri con esattamente 29 multipli compresi tra 1 e 10323 (inclusi) sono solo quelli compresi tra 345 e 355 inclusi; tra questi solo 353, 349 e 347 sono numeri primi, quindi i numeri richiesti sono tutti gli altri: 8 in tutto.
La risposta è `0008`.

Soluzione del problema 2. Il lato obliquo è l'ipotenusa del triangolo rettangolo CEB, dunque la sua $BC^2 = CE^2 + EB^2 = (AE^2 + AB^2) + (CD^2 + ED^2)$. Così $BC = \sqrt{11{,}22 + 14{,}79}\,\mathrm{m} = 5{,}1\,\mathrm{m}$.
La risposta è `5100`.

Soluzione del problema 3. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0{,}512$.
La risposta è `0051`.

Soluzione del problema 4. La somma degli n numeri naturali consecutivi a partire da $k > 0$ è $kn + \dfrac{n^2 - n}{2}$. La domanda chiede di trovare per quali $n \leq 2021$ si ha che i numeri n^2 e n^3 sono della forma $kn + \dfrac{n^2 - n}{2}$ per $k > 0$ opportuno, cioè esistono k e h tali che

$$n^2 = kn + \frac{n^2 - n}{2} \qquad \text{e} \qquad n^3 = hn + \frac{n^2 - n}{2},$$

Per la prima deve essere $k = \frac{n+1}{2}$, dunque n deve essere dispari. A questo punto basta prendere $h = n^2 - \frac{n-1}{2}$.
La risposta è `1011`.

Soluzione del problema 5. Siano a e b i numeri pensati da Silvio e da Emilia rispettivamente. Se a non dividesse 4000, allora Silvio saprebbe che il numero mostrato non è il prodotto e dedurrebbe il valore $b = 4000 - a$. Né $a = 4000$ perché altrimenti il numero mostrato non sarebbe la somma $a + b$ dato che $b > 0$. Perciò $2000 \geq a | 4000$. Quanto detto vale anche per il numero b. Se fosse $b < 2000$, Emilia saprebbe che il numero mostrato non è la somma dato che sarebbe $a + b < 4000$ e calcolerebbe a. Dunque $b = 2000$.
La risposta è `2000`.

Soluzione del problema 6. Per induzione si vede che, per $n > 0$, è $b_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ e $a_n = a_0 \cdot \prod_{i=0}^{n-1} b_i$. Perciò $a_{2021} = a_0 \cdot \prod_{i=0}^{2020} b_i$. Si noti che, per ogni $n > 0$,

$$b_{n+12} = 1 + \frac{(n+12)(n+13)}{2} \equiv b_n \pmod 6$$

dato che la metà del fattore pari tra $n+12$ e $n+13$ è congruo a n o $n+1$ modulo 6. Inoltre $2020 = 336 \cdot 6 + 4$; quindi per trovare il resto nella divisione per 6 di a_{2021} è sufficiente calcolare il resto nella divisione per 6 del prodotto dei primi 12 termini di (b_n), elevarlo alla potenza 168 e moltiplicare il resto nella divisione per 6 del risultato per i primi 4 termini di (b_n) e per a_0.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$b_n \pmod 6$	2	4	1	5	4	4	5	1	4	2	1	1

Il prodotto di questi resti è 4, e $4^2 \equiv 4 \pmod 6$, quindi $a_{2021} \equiv 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 \pmod 6$, cioè $a_{2021} \equiv 2 \pmod 6$
La risposta è `0002`.

Soluzione del problema 7. Iniziando dall'asola in alto a destra posso scegliere in quale asola, diversa da quella in alto a sinistra, entrare con le condizioni che appena esco da un'asola più bassa devo entrare subito nell'altra asola bassa e di entrare nell'asola in alto a sinistra per ultima [un'asola che non sia più in alto o più in basso è *intermedia*]. Un percorso è totalmente determinato separatamente dal colore dell'estremità del laccio che infilo nelle asole, dai 2 modi con cui entro in ciascuna delle 6 asole, dall'ordine con cui scelgo le 2 asole intermedie e la coppia di asole più basse, e dall'ordine tra le due asole di tale coppia: in totale da $2 \times 2^6 \times 3! \times 2$.
La risposta è `1536`.

Soluzione del problema 8. Le coppie di massimi comuni divisori da considerare sono $\mathrm{MCD}(261, 238) = 1$ e $\mathrm{MCD}(264, 279) = 3$, $\mathrm{MCD}(261, 279) = 9$ e $\mathrm{MCD}(264, 238) = 2$. Le mattonelle di area massima hanno perimetro 22 cm.
La risposta è `0022`.

Soluzione del problema 9. Calcoliamo quanti sono i numeri dati dalla giustapposizione di tre numeri di due cifre consecutivi che sono divisibili per 2 o per 5 o per 11 e sottraiamo il valore ottenuto al numero totale di numeri che si possono formare seguendo la regola.
Posso formare tanti numeri quanti sono quelli tra 10 e 97 inclusi, ovvero 88 in totale.
Quelli divisibili per 2 sono quelli che iniziano (e quindi terminano) con un numero, di due cifre, pari: 44 in tutto.
Quelli divisibili per 5, ma non per 2, sono quelli che terminano con un numero, di due cifre, divisibile per 5 ma non per 2, ovvero un numero che termina con la cifra 5: 9 in totale.
Calcoliamo ora quelli divisibili per 11 ma non per 2 e per 5. Consideriamo innanzitutto il caso in cui il numero sia della forma $aba(b+1)a(b+2)$, dove a indica una cifra compresa tra 1 e 9 inclusi e b una cifra uguale a 1, 5 oppure 7. Affinché tale numero sia divisibile per 11 si deve avere $3a - 3b - 3 = 0$, ovvero $a - b - 1 = 0$. Le uniche soluzioni possibili sono allora $a = 2$ e $b = 1$, $a = 6$ e $b = 5$ e $a = 8$ e $b = 7$.
Studiamo ora il caso in cui il numero sia della forma $a9(a+1)0(a+1)1$, con a una cifra non nulla e diversa da 9; per essere divisibile per 11 deve valere $3a - 8 = 0$ oppure $3a - 8 = 11$, ma entrambe non ammettono soluzioni naturali.
L'ultimo caso possibile è un numero della forma $a8a9(a+1)0$ con a sempre una cifra non nulla e diversa da 9; per essere divisibile per 11 deve valere $3a - 16 = 0$ oppure $3a - 16 = 11$ oppure $3a - 16 = -11$, ma tutte e tre non ammettono soluzioni naturali diverse da 9.
Abbiamo quindi in tutto solo 3 numeri divisibili per 11 ma non per 2 e per 5. In tutto quindi i numeri accettabili sono $88 - 44 - 9 - 3 = 32$.
La risposta è `0032`.

Soluzione del problema 10. Si ricordi che un polinomio monico di quinto grado contiene le informazioni sulle funzioni simmetriche elementari delle sue cinque radici dato che, in dipendenza dalle cinque radici, il polinomio $x^5 - 17x^4 + 102x^3 - 260x^2 + 264x - 84$ si scrive

$$\begin{aligned}x^5 &- (a+b+c+d+e)x^4 \\ &+(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)x^3 \\ &-(abc+ade+acd+abd+abe+ace+bcd+bde+bce+cde)x^2 \\ &+(bcde+acde+abde+abce+abcd)x \\ &-eabcd.\end{aligned}$$

Per scrivere la somma dei cubi delle radici a partire dai coefficienti, si può sviluppare

$$\begin{aligned}(a+b+c+d+e)^3 &= (a^3+b^3+c^3+d^3+e^3) + 6(abc+\cdots+cde)+ \\ &\quad +3a^2(a+b+c+d+e) - 3a^3 + \cdots + 3e^2(a+b+c+d+e) - 3e^3 \\ &= -2(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3) + 6(abc+\cdots+cde)+ \\ &\quad +3(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)(a+b+c+d+e)\end{aligned}$$

e scrivere inoltre $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = (a+b+c+d+e)^2 - 2(ab+\cdots+de)$. Utilizzando i dati specifici si ottiene

$$17^3 = -2(a^3+b^3+c^3+d^3+e^3) + 6\cdot 260 - 3[17^2 - 2\cdot 102]17,$$

così $a^3+b^3+c^3+d^3+e^3 = \frac{1560+4335-4913}{2} = 491$.
La risposta è `0491`.

Soluzione del problema 11. Il numero $x^2+xy+y^2 = 0 \pmod 2$ soltanto quando $x = y = 0 \pmod 2$ mentre è $x^2+xy+y^2 = 0 \pmod 5$ soltanto quando $x = y = 0 \pmod 5$. Il numero x^2+xy+y^2 è un multiplo di 10 se e solo se si verificano entrambi i casi; in tal caso la frazione è un multiplo di 10 e $x = 10a$ e $y = 10b$ per opportuni interi a e b. Il massimo valore di a^2+ab+b^2, inferiore a 1000 con a e b interi positivi, è 999 che si ottiene, ad esempio, con $a = 3$ e $b = 30$.
La risposta è `9990`.

Soluzione del problema 12.

$$\begin{aligned}\mathrm{MCD}(k^{2021}-1, k^{2020}-1) &= \mathrm{MCD}(k^{2021}-1-[k^{2020}-1], k^{2020}-1) \\ &= \mathrm{MCD}(k^{2020}(k-1), k^{2020}-1) \\ &= \mathrm{MCD}(k^{2020}-1, k-1) = \mathrm{MCD}(k^{2020}-1-(k-1), k-1) \\ &= \mathrm{MCD}(k(k^{2019}-1), k-1) = \mathrm{MCD}(k^{2019}-1, k-1) \\ &= \ldots = k-1,\end{aligned}$$

La risposta è `2022`.

Soluzione del problema 13. L'affermazione di un socio del gruppo B non può essere vera perché dichiara che lui stesso sta mentendo: dunque tutti i 505 soci dispari inferiori a 1010 mentono.
D'altro canto, tutti i soci con un numero pari dicono la verità. Infatti, ciascuna delle affermazioni false fatte dai soci del gruppo B assicura che c'è un socio $n > 1$ che dice la verità. I casi sono due: $n < 1011$ oppure $n > 1011$. Nel primo caso, si considerano i multipli pari di $(2a)n$: uno di questi supera 1011, dice la verità e, come 2020 dichiara che tutti i soci con numero pari dicono il vero. Nel secondo caso, se n è pari si conclude come prima. Se n è dispari, dichiara che c'è almeno un socio m pari che dice la verità perché già 505 soci dispari dicono il falso. Le configurazioni possibili sono due: tutti i 506 dispari maggiori di

1010 mentono; tutti loro dicono il vero. Entrambe le configurazioni sono accettabili. Nel primo caso si hanno in totale 1011 persone che dicono il falso (e 1010 che dicono il vero), nel secondo sono $1010 + 506 = 1516$ persone che dicono il vero.
La risposta è `2526`.

Soluzione del problema 14. Sia $\ell = 50\,\mathrm{cm}$. Si deve notare che il testo non specifica l'orientamento della base sul piano inclinato. Per motivi di simmetria, il baricentro è il punto medio dell'altezza che passa per i centri delle basi e l'altezza massima si ottiene con la base orientata in modo che una diagonale sia lungo la massima pendenza del piano. Per un parallelepipedo orientato nel modo specificato, siano A il vertice più basso della base, B il punto baricentrico, C il vertice opposto ad A sulla base (così $AC = \ell\sqrt{2}$), D il vertice diagonalmente opposto a A rispetto a B. L'inclinazione del piano assicura che il triangolo ACD è rettangolo con angoli di $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$, cioè $AD = 2AC$. Perciò $CD = AC\sqrt{3}$. Dunque $CD = \ell\sqrt{2}\sqrt{3} \approx 122{,}47\,\mathrm{cm}$
La risposta è `1224`.

Soluzione del problema 15. Si noti che $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab} = 2207+2 = 2209 = 47^2$. Di conseguenza $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})^2 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt[4]{ab} = 47 + 2 = 49$.
La risposta è `0007`.

Soluzione del problema 16. Sia s il valore della somma di (ogni) insieme E_i, dunque $s \geq n$ dato che n è uno degli addendi. Sia q il quoziente di n nella divisione con 4; per l'ultima condizione $4|s$ e s è minore o uguale della somma dei multipli di 4 fino a n, cioè $s \leq 2q(q+1)$. Inoltre la somma di tutti i numeri da 1 a n è $4s = \frac{n(n+1)}{2}$, cioè $8s = n(n+1)$, da cui $32|n(n+1)$; dato che uno tra n e $n+1$ è dispari, la condizione si riduce a $32|n$ oppure $32|n+1$. Nel caso $n = 31$ è $s = 124 > 112$. Nel caso $n = 32$, è $s = 132 = 12 + 16 + 20 + 24 + 28 + 32$. Si trovano facilmente altri tre insiemi, ad esempio $\{31, 30, 29, 27, 15\}$, $\{26, 25, 23, 22, 21, 2, 13\}$ e $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 17, 18, 19\}$.
La risposta è `0032`.

Soluzione del problema 17. Il volume di un cono di raggio r e altezza $h + h_1$ è $\frac{\pi r^2(h+h_1)}{3}$. Quindi possiamo calcolare quello del tronco di cono dati i raggi $r, r_1 < r$ delle basi e altezza h. Poiché $h_1 : r_1 = h : (r - r_1)$ si ha $h_1 = \frac{r_1 h}{r-r_1}$; Allora otteniamo

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{\pi r^2(h+h_1)}{3} - \tfrac{\pi r_1^2 h_1}{3} \\ &= \tfrac{\pi}{3}(r^2 h + r^2\tfrac{hr_1}{r-r_1} - r_1^2\tfrac{hr_1}{r-r_1}) = \tfrac{\pi}{3}h\tfrac{r^3-r_1^3}{r-r_1} \\ &= \tfrac{\pi}{3}h(r^2 + rr_1 + r_1^2). \end{aligned}$$

La figura finale è l'incollamento di due tronchi di cono tramite le rispettive facce di uguale raggio. Sia il raggio superiore della figura (quello del cilindro originale) r, raggio centrale r_1 e inferiore r_2. Data h l'altezza del cilindro, i volumi dei due tronchi di cono sono $V_1 = \frac{\pi h}{6}(r^2 + rr_1 + r_1^2)$ e $V_2 = \frac{\pi h}{6}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$. Ponendo $V_1 + V_2 = \pi r^2 h$ che è il volume del cilindro troviamo $r_2^2 + r_2 r_1 + 2r_1^2 + rr_1 - 5r^2 = 0$, in cui sostituiamo $r_1 = \frac{2}{3}r$ e otteniamo $r_2^2 + \frac{2}{3}r_2 r - \frac{31}{9}r^2 = 0$, da cui $r_2 = (\frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3})r \approx 1{,}5523r$.
La risposta è `1552`.

Soluzione del problema 18. Dato che $108 = 2^2 \cdot 3^3$ le cifre che possono apparire nel codice sono $1, 2, 3, 4, 6, 9$. I codici che contengono la cifra 9, essendo $\frac{108}{9} = 12 = 2\cdot2\cdot3\cdot1 = 2\cdot6\cdot1\cdot1 = 4\cdot3\cdot1\cdot1$, sono le permutazioni dei codici 92231, 92611 e 94311: ovvero $\frac{5!}{2!}\cdot 3 = 180$. I codici che contengono la cifra 6, ma non contegono la cifra 9, essendo $\frac{108}{6} = 18 = 3\cdot3\cdot2\cdot1 = 6\cdot3\cdot1\cdot1$, sono le permutazioni di 62331, cioè $\frac{5!}{2!} = 60$, e di 66311, cioè $\frac{5!}{2!2!} = 30$. I codici con la cifra 4, ma senza 6 e 9, con $\frac{108}{4} = 27 = 3^3$, sono le permutazioni di 43331, cioè $\frac{5!}{3!} = 20$. L'ultimo

caso rimanente è quello con solo cifre 3 e 2, ovvero le permutazioni di 33322 :$\frac{5!}{3!2!} = 10$. In totale le combinazioni del codice segreto sono $180 + 60 + 30 + 20 + 10 = 300$.
La risposta è `0300`.

Soluzione del problema 19. Dato che la probabilità che una persona sia ammalata è $\frac{1}{2}$, la probabilità che una coppia sia composta da contagiati è $\frac{1}{4}$. La probabilità di essere infettati in un incontro con una coppia è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. La probabilità di non essere infettati in un incontro è $\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$. In 6 incontri la probabilità di non essere infettati è $\left(\frac{7}{8}\right)^6$, quindi la probabilità cercata è $1 - \left(\frac{7}{8}\right)^6 \approx 0{,}55120$.
La risposta è `5512`.

Soluzione del problema 20. Le 10 persone in fila come richiesto possono essere disposti in 936 modi. Le disposizioni con Patrizio più a sinistra nella fila posteriore sono 56. Indicando con 1, 2,. . . 10 i dieci componenti in ordine di altezza a partire dal più basso, le disposizioni che rispettano anche la richiesta di Patrizio devono essere del tipo

a	b	10	9	8
c	d	e	f	g
s_1	s_2	s_3	s_4	s_5

Si considerino i segni s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5 e per ogni parola a scritta usando i cinque segni, sia $[\![s_i]\!](a)$ il numero di segni s_i che compaiono in a. Disporre le 10 persone su due file come richiesto corrisponde a ordinare due copie dei segni s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5 in parole p tali che, per ogni parte iniziale a della parola p,

$$2 \geq [\![s_1]\!](a) \geq [\![s_2]\!](a) \geq [\![s_3]\!](a) \leq [\![s_4]\!](a) \leq [\![s_5]\!](a) \leq 2.$$

Ad esempio la parola $p_0 = s_1s_1s_5s_5s_2s_2s_4s_4s_3s_3$ verifica le condizioni richieste e descrive la disposizione

2	6	10	8	4
1	5	9	7	3

Si definisce per induzione una funzione $f : \mathbb{N}^5 \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dove le prime cinque componenti indicano il numero di segni s_1, s_2, s_3, s_4 e s_5 presenti e la sesta componente è il numero complessivo dei segni con le condizioni

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t+1) &= 1 && \text{per } x_1 = 1 \text{ e } x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = t = 0\\
F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t+1) &= 1 && \text{per } x_2 = 1 \text{ e } x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = t = 0\\
F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t+1) &= \textstyle\sum_{i=1}^{5} \sum_{x_i \leq 2} F(\dots, x_i - 1, \dots, t) &&\\
& && \text{per } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = t + 1\\
& && \quad \text{e } x_1 \geq x_2 \geq x_3 \leq x_4 \leq x_5\\
F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t) &= 0 && \text{altrimenti}
\end{aligned}$$

per calcolare $F(2, 2, 1, 1, 1, 7)$.
Si può anche trovare per forza bruta: 7 può essere soltanto in b ed e; 6 soltanto in a, b, e ed f (soltanto se 7 è in e). Si vede che, se le posizioni a, b ed e sono usate da 5, 6 e 7, questi possono essere permutati tra loro; allo stesso modo per 4, al posto di 5 quando questo è in a o in b. Ci sono 6 disposizioni per ciascuno dei cinque casi possibili. Anche quando 6 e 7 stanno nelle posizioni b ed e e né 4, né 5 stanno in a, quelli possono essere scambiati tra loro: ciascun caso dà luogo a 8 disposizioni. Infine ci sono 10 disposizioni con 7 in e e 6 in f.
La risposta è `0056`.

Soluzione del problema 21. Siano B e h rispettivamente l'area di base e l'altezza dei due coni. Il volume di cioccolato contenuto all'interno della clessidra è $V_{\text{tot}} = \frac{B \cdot h}{3}$. Nel momento in cui in entrambi i coni c'è la stessa quantità di cioccolato esso occupa nel cono superiore un volume pari a $V_{\text{sup}} = \frac{b \cdot x}{3}$, dove b e x sono rispettivamente l'area della base e l'altezza del cono

ridotto. Poiché i due volumi sono uguali, il volume di cioccolato totale è uguale al doppio di V_{sup}, quindi $2\frac{b \cdot x}{3} = \frac{B \cdot h}{3}$. Siano $r = \sqrt{\frac{b}{\pi}}$ e $R = \sqrt{\frac{B}{\pi}}$ i raggi delle basi di area b e B. Si osservi che x, h, r e R sono legati dal teorema di Talete, quindi vale la relazione $bh^2 = Bx^2$. Dalle due relazioni si ottiene $x = \sqrt[3]{\frac{h^3}{2}}$, quindi il risultato è $h \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \approx 3{,}0944\,\mathrm{dm}$.
La risposta è `3094`.