Soluzioni per la Coppa Gauss 2017

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Matteo Bobbio, Sandro Campigotto, Mattia Fecit, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Franco Obersnel, Maurizio Paolini, Damiano Poletti, Francesco Raspaolo, Alessandro Rosolini, Edi Rosset, Alberto Saracco, Simone Traverso.

Soluzione del problema 1. L'area minima si ottiene se tutte le pieghe sono parallele a un lato, non importa quale. L'area minima è comunque $\dfrac{8 \cdot 54}{7} = 61.71\,\mathrm{cm}^2 = 6171\,\mathrm{mm}^2$.
La risposta è `6171`.

Soluzione del problema 2. Chiamiamo con N il numero di persone con una maglietta nera, con R il numero di quelli con una maglietta rossa e con A il numero delle persone senza maglietta rossa e senza maglietta nera. Il problema diventa

$$\begin{aligned}&100N + 50R + 130R + 50N + 50A = 4510\\&N + R + A = 50\end{aligned}$$

da cui $100N + 50 \cdot 50 + 130R = 4510$, quindi $100N + 130R = 2010$, cioè $10N + 13R = 201$ che è diofantea. La soluzione cercata è $N = 11$, $R = 7$. Yortuk spende 16\$, Georg 14, 60\$ e Fox 14, 50\$. La risposta è `1450`.

Soluzione del problema 3. Il rapporto tra i due volumi è $\dfrac{\pi 20^2 \cdot 24}{\pi 12^2 \cdot 10} = \dfrac{2 \cdot 10}{3} = \dfrac{20}{3} = 6.\overline{6}$.
La risposta è `0006`.

Soluzione del problema 4. Se oggi è venerdì 3 marzo 2017, da qui al 31 dicembre ci sono 303 giorni; ciò significa che, se Samurai Futaba non raccogliesse mai, il 31 dicembre sull'albero vi sarebbero 304 mele.
Samurai Futaba non può raccogliere la prima settimana dal 3 marzo al 5 marzo perché deve essere $n \geq k$, dove n è il numero di mele sull'albero e k è il numero di mele che stanno nel contenitore del giorno.
Il giorno k di una qualunque settimana (esclusa la prima) in cui si può raccogliere deve essere tale che $k|(k + r)$, ove r è il numero di mele che si trovavano sull'albero la domenica della settimana precedente. Se $k|(k + r)$, allora $k|r$, con p intero positivo. Perciò la seconda settimana Samurai Futaba raccoglie mele mercoledì, poiché $3|(3 + 3)$. La domenica della seconda settimana vi saranno $7-3 = 4$ mele sull'albero. La terza settimana Samurai Futaba raccoglie mele martedì dato che $2|(2+4)$ e domenica ci saranno 5 mele sull'albero. La quarta settimana Samurai Futaba raccoglierà di venerdì, e rimarranno 2 mele. Quella dopo martedì e ne rimarranno 5 e così via. A partire dalla terza settimana i resti si ripetono ciclicamente. Quindi tutte le settimane successive si raccoglierà alternativamente martedì e venerdì.
Le settimane tra il 3 marzo e il 31 dicembre sono date dalla divisione $303 = 7 \cdot 43 + 2$. La seconda settimana è esclusa dalle ripetiziioni; quindi ne rimangono 42. In particolare alla quarantaquattresima settimana Samurai Futaba raccoglierà di venerdì: il resto 2 trovato nella divisione indica che il 31 dicembre sarà domenica, dunque il totale delle mele raccolte è $304 - 2 = 302$.
La risposta è `0302`.

Soluzione del problema 5. Due tacche dei minuti adiacenti formano un angolo di $\dfrac{360°}{60} = 6°$. Dato che $\dfrac{24°}{6°} = 4$, la lancetta delle ore deve necessariamente trovarsi su una delle

tacche dei minuti per formare un angolo di 24° con quella dei minuti vista l'imposizione sul movimento della lancetta dei minuti. La lancetta delle ore avanza di una tacca ogni 12 minuti; perciò si sta cercando il più piccolo h tale che $|h - 12h| = 4(\mathrm{mod}60)$, cioè $11h = 4(\mathrm{mod}60)$ oppure $11h = 56(\mathrm{mod}60)$. Il primo ha soluzione $h = 44$, il secondo $h = 16$, che corrispondono alle 20:46 e alle 15:12. [Si noti che la risposta è corretta anche se si considerano angoli orientati.]
La risposta è `0192`.

Soluzione del problema 6. Consideriamo il caso in cui vengano prodotte esattamente 5 uova. 5 giorni la gallina ha prodotto, 2 no. Questi ultimi 2 sono consecutivi o no? Uno dei 2 è venerdì? Si aprono quindi 4 sottocasi che andiamo a discutere:

- Consecutivi, uno dei due è venerdì: 1 caso con probabilità
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{192}.$$
- Consecutivi, nessuno dei due è venerdì: 5 casi ciascuno con probabilità
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{128}.$$
- Non consecutivi, uno dei due è venerdì: 5 casi ciascuno con probabilità
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{96}.$$
- Non consecutivi, nessuno dei due è venerdì: $\binom{5}{2} = 10$ casi ciascuno con probabilità
$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{72}.$$

Consideriamo ora il caso in cui vengano prodotte esattamente 6 uova. 6 giorni la gallina ha prodotto, 1 no. Quest'ultimo è venerdì? Si aprono 2 sottocasi che andiamo a discutere:

- Venerdì: 1 caso con probabilità
$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{128}.$$
- Non venerdì: 6 casi ciascuno con probabilità
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{96}.$$

Consideriamo ora il caso in cui vengano prodotte esattamente 7 uova. La gallina ha prodotto tutti e 7 i giorni. Abbiamo quindi 1 caso con probabilità
$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}.$$
Pertanto la probabilità cercata è
$$\frac{1}{192} + 5 \cdot \frac{1}{128} + 5 \cdot \frac{1}{96} + 10 \cdot \frac{1}{72} + \frac{1}{128} + 6 \cdot \frac{1}{96} + \frac{1}{128} = \frac{23}{192} + \frac{7}{128} + \frac{10}{72} = \frac{361}{1152}.$$
La risposta è `1513`.

Soluzione del problema 7.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	47	54

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
60	63	66	69	72	77	82	86	90	94	98	102	106	110

Quindi $l_d(a_{27}) = l_d(a_1)$, inoltre anche la cifra delle unità di a_{27} è uguale a quella di a_{10}. Dunque, eseguita la divisione $n-1 = 26 \cdot q + r$ con $0 \leq r < 26$ si ha che

$$a_n = 100 \cdot q + a_{r+1}.$$

Dato che $2017 = 26 \cdot 77 + 15$, è $a_{2017} = 100 \cdot 77 + a_{15} = 7700 + 63 = 7763$.
La risposta è `7763`.

Soluzione del problema 8. Sia T la differenza tra l'ora di arrivo e quella di partenza indicata dall'orologio sull'auto. Consideriamo innanzitutto come agisce il piano di Frank. Sia v la velocità che intende mantenere Papà Beldar e V la velocità reale diversa da quella segnata sul contachilometri per l'azione di Frank. Allora

$$v = V + \frac{1}{3}V,$$

e $V = \frac{3}{4}v$. Invece di impiegare un tempo t, con l'attuazione di questo piano si impiega $\frac{4}{3}t$. Il piano di Papà Beldar invece modifica il tempo impiegato t nel tempo $\frac{1}{2}t$. Supponiamo che:

- Papà Beldar non esegue il piano: $T = \frac{4}{3} \cdot 60 + 10 - 20 = 70$. Arrivo indicato alle 11:10; vince Mamma Prymaat.
- Mamma Prymaat non esegue il piano: $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 60 - 20 = 20$. Arrivo indicato alle 10:20; non vince nessuno.
- Connie non esegue il piano: $T = \frac{2}{3} \cdot 60 + 10 = 50$. Arrivo indicato alle 10:50; non vince nessuno.
- Frank non esegue il piano: $T = \frac{1}{2} \cdot 60 + 10 - 20 = 20$. Arrivo indicato alle 10:20; non vince nessuno.

Pertanto la famiglia Conehead arriverà alle 11:10, ma attenzione, la figlia ha spostato indietro di 20 minuti l'ora. Il tempo impiegato sarà quindi di 90 minuti.
La risposta è `0090`.

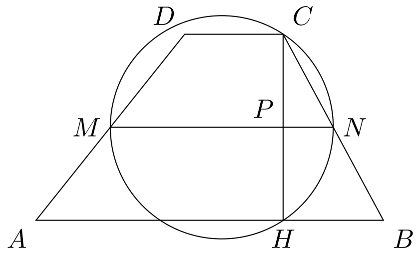
Soluzione del problema 9. Siano x_1 e x_2 le due radici intere di $p(x)$. Ovviamente $x_1x_2 = 2017^{2017}$. Dato che 2017 è un numero primo, l'unica possibilità è che $x_1 = 2017^i$ e $x_2 = 2017^{2017-i}$, oppure $x_1 = -2017^i$ e $x_2 = -2017^{2017-i}$, per i che va da 0 a 2017. Questo corrisponde a 1009 valori diversi di a per il primo caso, e altri 1009 valori diversi per il secondo. Quindi in totale abbiamo 2018 valori diversi di a.
La risposta è `2018`.

Soluzione del problema 10. Si determinano i numeri divisibili per 7 si sei cifre con somma delle cifre uguale a 3. Il resto di un numero di sei cifre $abcdef$ nella divisione con 7 è (congruo modulo 7 a) $f+3e+2d-c-3b-2a$; le cifre verificano la condizione che $a+b+c+d+e+f = 3$ e $a > 0$. Per $a = 1$, si hanno i casi 100002 e 101010. Per $a = 2$, si ha il caso 210000.
I numeri di sei cifre la cui somma delle cifre sia 3 sono composti da cifre che possono essere cinque copie di 0 e 3; quattro copie di 0, 1 e 2; tre copie di 0, e tre copie di 1. Nel primo caso c'è un solo numero: 300000. Nel secondo caso sono cinque con 1 come prima cifra a destra e altre cinque con 2 come prima cifra a destra. Nel terzo caso sono $\binom{5}{2} = 10$. In totale sono $1 + 2 \cdot 5 + 10 = 21$. I numeri richiesti sono $21 - 3 = 18$.
La risposta è `0018`.

Soluzione del problema 11. Sia $P(n)$ la proprietà che il numero naturale n sia uguale alla somma della somma delle sue cifre e del prodotto delle sue cifre. Se n sia un numero di una cifra, $P(n)$ è verificata quando $n + n = n$, cioè $n = 0$. Sia n di due cifre, cioè $n = 10a + b$ per opportune cifre $a > 0$ e b. Dunque $P(n)$ è verificata esattamente quando $a(b+1) = ab + a = 10a$, cioè $b = 9$. Quindi soddisfano P esattamente i nove numeri $10a + 9$, per $0 < a < 10$. Supponiamo $n > 99$, cioè $n = 100a + 10b + c$ per opportune cifre $a > 0$, b e c.

Dunque $P(n)$ è verificata se e solo se $abc+(a+b+c) = 100a+10b+c$, cioè $a(bc-99) = 9b$. Ma $bc < 99$ qualunque siano $b, c \leq 9$. Perciò non ci sono numeri di tre o più cifre che verificano P.
La risposta è `0010`.

Soluzione del problema 12. Sia $ABCD$ il trapezio con base maggiore AB e base minore CD. Siano M e N i punti medi dei due lati obliqui, rispettivamente di AD e di BC. Sia H il piede dell'altezza del trapezio spiccata da C che interseca il segmento MN nel punto P.



Dato che CPN è simile a CHB si ottiene che $AB + CD = 2MN$ e l'area del trapezio è uguale a $MN \cdot CH$. Inoltre, dato che MN è l'asse della corda CH, MN è un diametro della circonferenza che tocca M, H, N e C. Perció $\widehat{MCN}$ è retto e $MP \cdot PN = CP^2 = \frac{1}{4}CH^2$; dunque $CH^2 = 4MP \cdot PN$. Così il rapporto

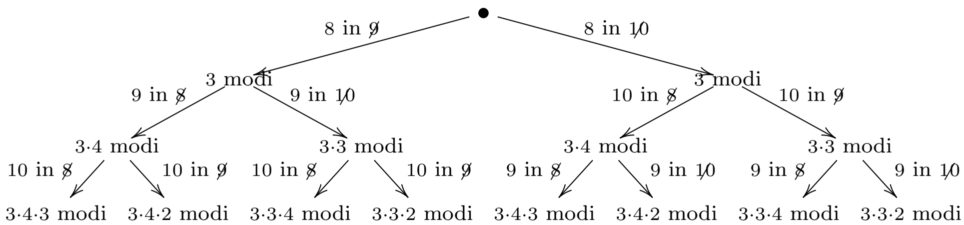
$$\frac{MN}{CH} = \frac{MN \cdot CH}{CH^2} = \frac{5600}{400} = 14.$$

La risposta è `0014`.

Soluzione del problema 13. Le dieci posizioni in cui vengono mescolate le 10 carte sono

$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	$\cancel{8}$

dove, per ciascuna, si è indicato quale carta non deve comparire per la riuscita del solitario. Lo schema sotto indica le posizioni delle tre carte 8, 9 e 10 per la riuscita del solitario:



Per la riuscita del solitario, le scelte per le tre carte sono $2 \cdot [3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 6] = 2 \cdot 3 \cdot 38 = 228$. Le altre sette carte possono comparire in una qualunque delle rimanenti posizioni.
La probabilità è

$$\frac{228 7!}{10!} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 19}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{19}{60}.$$

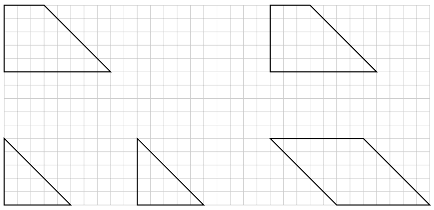
La risposta è `0079`.

Soluzione del problema 14. Il perimetro "esterno" consiste di 6 segmenti di lunghezza pari al diametro delle circonferenze e da 6 archi, ognuno di lunghezza pari a $1/6$ di circonferenza. Dunque $P = 6 \cdot 500\,\mathrm{mm} + \pi \cdot 500\,\mathrm{mm} = 500\,\mathrm{mm} \cdot (6 + \pi) = 4570\,\mathrm{mm}$.
La risposta è `4570`.

Soluzione del problema 15. Due numeri a e b sono tali che $100000|a - b$ se e solo se $a = b(\mathrm{mod}10000)$ d sono tali che $100000|a + b$ se e solo se $a + b = 0(\mathrm{mod}10000)$. Dunque a e b verificano la condizione richiesta dal problema se e solo se $a = b(\mathrm{mod}10000)$ oppure $a + b = 0(\mathrm{mod}10000)$. Questa condizione partiziona i numeri naturali in 5001 classi: una prima classe raccoglie i numeri le cui ultime 4 cifre sono 0000; una seconda classe raccoglie i

numeri le cui ultime 4 cifre sono 0001 o 9999; una terza classe raccoglie i numeri le cui ultime 4 cifre sono 0002 o 9998, e così via fino alla 5001-esima che raccoglie i numeri le cui ultime 4 cifre sono 5000.
Per il Pigeonhole Principle la condizione richiesta è verificata quando si scrivono 5002 numeri.
La risposta è `5002`.

Soluzione del problema 16. Basta verificare che, accostando le figure in modo da eliminare gli angoli acuti, si ottengo due rettangoli con un triangolo rettangolo e un trapezio, eventualmente inserendo il parallelogramma tra i due:



I due rettangoli ha perimetri di $(8\,\text{cm} + 5\,\text{cm}) \times 2 = 26\,\text{cm}$ e $26\,\text{cm} + 7\,\text{cm} \times 2 = 40\,\text{cm}$. Per formare una T, si accosta un lato minore a un lato maggiore. Il perimetro della T è $26\,\text{cm} + 40\,\text{cm} - 5\,\text{cm} \times 2 = 56\,\text{cm} = 560\,\text{mm}$.
La risposta è `0560`.

Soluzione del problema 17. Consideriamo una data distribuzione delle carte. Le possibilità sono 3: vince Samurai Futaba, perde Samurai Futaba, la partita finisce in pareggio.
Se Samurai Futaba vincesse, nel caso speculare (quello in cui Samurai Futaba ha le carte di Mr. Dantley e viceversa), Samurai Futaba perderebbe; viceversa, se Samurai Futaba perdesse, nel caso speculare vincerebbe. Quindi a patto di dividere per 2 il problema si trasforma nel contare quanti sono i casi in cui i 2 amici pareggiano. Per finire tutte le carte è chiaro come un amico debba avere tutte le carte dispari e l'altro tutte quelle pari (immediata conseguenza del fatto che giocano una carta a testa consecutiva a quella precedentemente scartata). La strategia migliore di colui che ha le carte dispari è quella di giocare sempre la carta con numero precedente a quello appena scartato. Altrimenti, giocando il successivo, darebbe al secondo (utilizzando la stessa strategia) di batterlo. In questo modo la partita finirà in pareggio. Quindi

$$P = \frac{\dfrac{\binom{16}{8} - 2}{2}}{\binom{16}{8}} = \frac{3217}{6435}.$$

Dunque la risposta è $3217 + 6435 = 9652$.
La risposta è `9652`.

Soluzione del problema 18. Siano $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_{21}$ i numeri che compaiono in un tale elenco. Dato che $z_n \leq z_{n+1}$ per $n = 1, \ldots, 20$, si ha che $z_{n+1} - z_n \geq 1$; dunque $z_{n+k} - z_n \geq k$ per $1 \leq k \leq 21 - n$. La condizione richiesta per le somme è verificata se e solo se vale per

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{11} > z_{12} + z_{13} + \ldots + z_{21}.$$

Da questa si ottiene che $z_1 > (z_{12} - z_2) + (z_{13} - z_3) + \ldots + (z_{21} - z_{11}) \geq 10 \cdot 10 = 100$. Si nota ora che l'elenco dei 21 numeri da 101 a 121 verifica la condizione richiesta dal problema.
La risposta è `0101`.

Soluzione del problema 19. Sia $d = b + c$. Dalle due identità si ottiene $(5 - b)^2 + b^2 + (d - b)^2 - 26 = 0$, cioè

$$3b^2 - 2(d + 5)b + d^1 - 1 = 0$$

che ha soluzioni reali se e solo se

$$(d + 5)^2 - 3d^2 + 3 \geq 0.$$

La condizione si riscrive $0 \geq 2d^2 - 10d - 28 = 2(d + 2)(d - 7)$. Perciò, l'equazione in b ha soluzioni reali se e solo se $-2 \leq d \leq 7$. Dato che $d \geq 7$, si ha che $d = 7$, il discriminante dell'equazione vale 0 e l'unica terna che verifica le tre condizioni è $b = 4$, $a = 1$, $c = 3$.

La risposta è 0008.

Soluzione del problema 20. Sia d_n il numero di divisori diversi da 1 del numero naturale n. Ricordando la formula per dedurre il numero di divisori di un naturale n dalla sua scomposizioni in fattori primi, possiamo scrivere le seguente tabella.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
d_n	1	1	2	1	3	1	3	2	3	1	5	1	3	3	4	1	5	1	5	3

La strategia migliore per Samurai Futaba è di ripetere il numero appena udito da Mr. Dantley. Infatti se n è il numero detto da Mr. Dantley, il risultato del dado deve essere un multiplo di n. Poiché $d_n < d_{mn}$ con $m \in \mathbb{N}_{>1}$, la probabilità che sia uscito il numero n è maggiore della probabilità che sia uscito il numero mn. Infatti per la probabilità condizionata, chiamata con X la variabile del risultato uscito sul dado e con E_n l'evento "Mr. Dantley dice il numero n",

$$\mathbb{P}[X = n|E_n] = \frac{\mathbb{P}[X = n \ \cap \ E_n]}{\mathbb{P}[E_n]} = \frac{\frac{1}{d_n} \cdot \frac{1}{20}}{\mathbb{P}[E_n]},$$

mentre

$$\mathbb{P}[X = nm|E_n] = \frac{\mathbb{P}[X = nm \ \cap \ E_n]}{\mathbb{P}[E_n]} = \frac{\frac{1}{d_{nm}} \cdot \frac{1}{20}}{\mathbb{P}[E_n]}.$$

Quindi Samurai Futaba vince se e solo se Mr. Dantley dice esattamente il numero uscito, pertanto la probabilità cercata è

$$\frac{1}{20} \sum_{n=2}^{21} \frac{1}{d_n} = \frac{237}{400}.$$

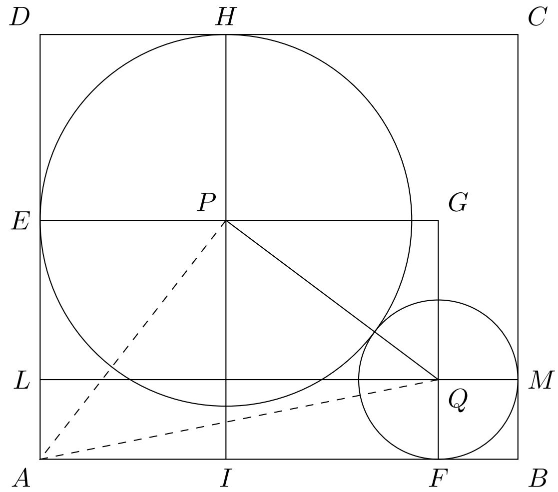
La risposta è 0637.

Soluzione del problema 21. Osserviamo che con le prime due pescate non è possibile realizzare 21 o più, Quindi distinguiamo a seconda dei possibili valori che possono avere le prime due carte sommate. A noi interessano i valori da 2 a 16, perché solo in questi casi il giocatore ha possibilità di realizzare 21. Se la somma delle prime due carte è compresa tra 2 e 10 non è possibile realizzare 21 solo con la terza carta. Quindi, sia s la somma delle prime 2 carte (compresa tra 2 e 16), allora deve essere $11 \leq s + v \leq 16$ o $s + v = 21$, dove v rappresenta il valore della terza carta. Rappresentiamo ora le possibilità in una tabella (tutti i valori riportati sono immediati da trovare):

s	Modi per ottenere s	Modi in cui si può ottenere 21 a partire da s
2	1	2 + 6
3	2	3 + 6
4	3	4 + 6
5	4	5 + 6
6	5	6 + 6
7	6	6 + 3
8	7	6 + 3
9	8	6 + 3
10	9	6 + 3
11	10 + 6	6 + 3
12	9 + 6	5
13	8 + 6	4
14	7 + 6	3
15	6 + 6	2
16	5 + 6	1

dove i +3 e i +6 contano i casi in più derivati dal fatto che le carte che valgono 10 sono 4 e non una sola. A questo punto i casi totali sono $1 \times 8 + 2 \times 9 + 3 \times 10 + 4 \times 11 + 5 \times 12 + 6 \times 9 + 7 \times 9 + 8 \times 9 + 9 \times 9 + 16 \times 9 + 15 \times 5 + 14 \times 4 + 13 \times 3 + 12 \times 2 + 11 \times 1 = 779$.
La risposta è 0779.

Soluzione del problema 22. Si consideri la figura



Siano r e s le lunghezze dei raggi delle circonferenze di centro P e Q rispettivamente. Il segmento PQ passa per il punto di tangenza delle due cirocnferenze. Considerato il triangolo rettangolo PQG e posto $a = r + s$ si ha che $a^2 = (9 - a)^2 + (8 - a)^2$, usando come unità di misura dakm e tralasciandole. Dunque $a^2 - 34a + 145 = 0$, cioè $a = 5$ oppure $a = 29$. Ma $a = r + s \leq 5$, perciò $r + s = a = 5$. L'area di APQ si calcola sottraendo all'area del rettangolo $AFGE$ le aree dei tre triangoli AFQ, QGP e APE. Ricordando che $r + s = 5$, si ha che

$$
\begin{aligned}
&(9 - s)(8 - r) - \tfrac{1}{2}\left[s(9 - s) + (9 - a)(8 - a) + r(8 - r)\right] = \\
&= 72 - 9r - 8s + rs - \tfrac{1}{2}[9s - s^s + 12 + 8r - r^2] \\
&= 72 - 45 + s + rs - \tfrac{1}{2}[40 + s + 12 - s^2 - r^2] \\
&= 27 + s + \tfrac{25}{2} - 26 - \tfrac{s}{2} \\
&= 13 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{s}{2}.
\end{aligned}
$$

Il massimo si ottiene per il massimo valore possibile per s che è 4.
La risposta è `1550`.

Soluzione del problema 23. Supponiamo senza perdere di generalità $a \geq b$. Consideriamo 110 e 9263. Una delle due cifre delle unità deve essere errata. Infatti se 0, la cifra delle unità della somma, fosse giusta, le cifre delle unità di a e b potrebbero essere $(0, 0), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$; nessuna di queste produce 3 (cifra delle unità del prodotto), una volta moltiplicate.
Consideriamo il $110 = a + b$. Supponiamo che lo 0 sia corretto. Allora il 3 di $9263 = a \cdot b$ è sbagliato. Pertanto, guardando le coppie di cifre possibili per l'unità di a e b, $a \cdot b$ può essere 9260, 9261, 9264, 9265, 9266 o 9269. Scomponendo pertanto i possibili prodotti si ottiene:

- $9260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 463$. Ma a e b dovrebbero finire entrambi per 0, quindi non c'è possibilità. Si osservi che per escludere questo numero non è necessario scomporlo, basta verificare che non è divisibile per 100.

- $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Siccome a e b dovrebbero avere come unità 3 e 7 l'unica possibilità è $a = 147$ e $b = 63$. Pertanto $a + b = 210$ che è diverso da 110 per una cifra. Quindi abbiamo trovato una possibile soluzione.

- $9264 = 2^4 \cdot 3 \cdot 193$. Siccome a e b dovrebbero avere come unità 4 e 6 le uniche possibilità sono $a = 386$ e $b = 24$ o $a = 1544$ e $b = 6$. Pertanto $a + b = 410$ che è diverso da 110 per una cifra, o $a + b = 1550$, che non è accettabile. Abbiamo così trovato una seconda possibile soluzione.

- $9265 = 5 \cdot 17 \cdot 109$. Ma a e b dovrebbero finire entrambi per 5, quindi non c'è possibilità. Si osservi che per escludere questo numero non è necessario scomporlo, basta verificare che non è divisibile per 25.

- $9266 = 2 \cdot 41 \cdot 113$. Siccome a e b dovrebbero avere come unità 2 e 8 non c'è possibilità. Si osservi che per escludere questo numero non è necessario scomporlo, basta verificare che non è divisibile per 4.
- $9269 = 13 \cdot 23 \cdot 31$. Siccome a e b dovrebbero avere come unità 1 e 9 l'unica possibilità è $a = 299$ e $b = 31$. Pertanto $a + b = 330$ che è diverso da 110 per più di una cifra. Pertanto non c'è soluzione.

Supponiamo che lo 0 di 110 sia sbagliato. Allora $a + b < 120$. Ma allora $a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < 60^2 = 3600$. Pertanto la cifra delle migliaia di 9263 deve essere errata e minore di 4. Siccome questo vuol dire che la cifra dell'unità del prodotto (3) è corretta le possibili cifre delle unità per a e b sono solo 1 e 3 oppure 7 e 9. Pertanto scomponiamo ancora i possibili prodotti in questo caso, 1263, 2263 e 3363, alla ricerca di possibili soluzione.

- $1263 = 3 \cdot 421$. Ma $421 + 3 = 424$ che è diverso da 110 per più di una cifra; quindi non c'è possibilità per a e b.
- $2263 = 31 \cdot 73$. Ma $31 + 73 = 104$ che è diverso da 110 per più di una cifra; quindi non c'è possibilità per a e b.
- $3263 = 13 \cdot 251$. Ma $13 + 251 = 264$ che è diverso da 110 per più di una cifra; quindi non c'è possibilità per a e b.

Abbiamo pertanto trovato quattro coppie ordinate (a, b) possibili: $(147, 63), (63, 147), (386, 24), (24, 386)$.
Quindi la risposta è 386.
La risposta è `0386`.

Soluzione del problema 24. Se due carte di seme diverso sono attaccate, almeno una delle due è un Re: la prima delle due carte non può essere una carta con un numero perché la segue una carta di seme diverso e nessuna delle due può essere una carta senza numero che dice il vero: deve pertanto essere un Re. Dato che ci sono due Re, ci possono essere al massimo due cambi di seme.
Consideriamo il caso che ci sia solo un cambio di seme in tutto il mazzo. Ciò vuol dire che ci saranno prima tutte le carte di un seme che terminano con il Re, poi tutte le carte dell'altro seme. Il Re del secondo seme, siccome mente, deve per forza stare vicino al Re del primo; a seguire, le ultime 8 posizioni del mazzo, per rispettare la frase detta dai numeri, devono essere occupate, nell'ordine, dal 7, 6, 5, 4, 3, 2 e dalle ultime due figure, il Fante e la Regina, queste due nell'ordine che preferiscono. Per le prime 8 posizioni c'è invece più libertà: il 7 può occupare la prima o la seconda posizione, il 6 quella non occupata dal 7 o la terza, il 5 quella non occupata dal 6 e dal 7 o la quarta e così via. I modi possibili per questo caso sono pertanto: $2 \cdot 2^6 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$.
Consideriamo poi il caso che ci siano 2 cambi di seme. La disposizione delle carte è pertanto costituito da tre blocchi di carte dello stesso seme. Consideriamo le carte che costituiscono il secondo dei due cambi di seme. La carta che precede abbiamo già osservato che è un Re, ma la carta che segue non può esserlo perchè l'altro Re è impegnato per il primo cambio. Pertanto deve essere un numero. Ora, un numero porta con sè inevitabilmente almeno altre 2 carte dello stesso seme: pertanto il 7 deve stare in questo blocco e non nel primo perchè non vi sarebbero abbastanza carte. Ma il 7 si porta con sè altre 7 carte; considerato che per questo seme il Re deve stare inevitabilmente nel primo blocco, nel primo blocco c'è solo il Re e nel terzo le carte dal 7 al 2 e in fondo la Regina e il Fante nell'ordine che preferiscono.
Consideriamo ora il secondo seme, tutto raccolto nel secondo blocco: il 7 può occupare la prima o la seconda posizione, il 6 quella non occupata dal 7 o la terza, il 5 quella non occupata dal 6 e dal 7 o la quarta e così via; ma attenzione! Se il 7 occupa la seconda posizione, il 6 la terza, il 5 la quarta,...,il 2 la settima, uno tra la Regina e il Fante occuperebbe la prima e questo non è possibile perché sarebbe preceduto dal Re dell'altro seme. Con questo accorgimento, i modi possibili per questo caso sono: $2 \cdot (2^6 - 1) \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 - 2^3 = 512 - 8 = 504$.
Pertanto la risposta è $512 + 504 = 1016$
La risposta è `1016`.