Soluzioni per la Coppa Gauss 2015

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Mihaela Badescu, Luigi Amedeo Bianchi, Gabriele Della Torre, Mattia Fecit, Giulia Frosoni, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Maurizio Paolini, Damiano Poletti, Edi Rosset.

Soluzione del problema 1. Contiamo i tratti continui (cioè quelli per i quali non è obbligatorio staccare la penna dal foglio) minimi, necessari alla scrittura delle singole lettere.

Lettera	A	N	C	E	M	H	L
Tratti minimi	2	1	1	2	1	3	1

Perciò per scrivere il suo nome una volta saranno necessari

$$2+1+1+2+1+2+1+1+3+2+1+2=19$$

tratti continui. Dunque per scrivere il suo nome 75 volte saranno necessari

$$19 \cdot 75 = 1425$$

tratti continui. Quindi Anna dovrà staccare la penna dal foglio $1425-1=1424$ volte.
La risposta è `1424`.

Soluzione del problema 2. Ne servono $29-1$. Inoltre non conta molto quali si conoscono, basta che i dati siano tali da non avere alcuna riga o colonna vuota all'inizio (esclusa la diagonale).
La risposta è `0028`.

Soluzione del problema 3. Si noti che il primo pappagallo deve essere intelligente, altrimenti ripeterebbe la domanda posta da Boole. Per cui il secondo deve essere necessariamente normale. Una configurazione possibile sarà perciò, indicando con "I" un pappagallo intelligente e con "N" un pappagallo normale:

$$IN\ IIN \ldots IIN$$

dato che $3|(2015-2)$. Il numero massimo di pappagalli intelligenti è $1+\frac{2013}{3}\cdot 2 = 1343$. Supponiamo per assurdo che non sia così; esiste pertanto una configurazione con almeno 1344 pappagalli intelligenti. Poiché il primo e il secondo pappagallo sono fissati, ci sono al massimo 671 pappagalli normali. Per il principio del "pigeonhole" esisterà una tripletta di pappagalli intelligenti vicini. ↯
Il minimo numero sarà chiaramente 1, dato dalla sequenza:

$$INN \ldots N$$

. Quindi la risposta sarà $1343-1=1342$
La risposta è `1342`.

Soluzione del problema 4. Innanzitutto, si noti che essere divisibile per 2015 implica che il numero è divisibile per 5, 13 e 31. Visto che è divisibile per 5, la sua ultima cifra deve essere 0 oppure 5, ma dal testo si evince che 5 non può essere. Quindi l'ultima cifra, così come la quarta, è 0. Abbiamo, adesso, solo 6 numeri possibili: 120120, 210210, 230230, 320320, 130130 e 310310. Tre di questi (120120, 230230 e 130130) sono da scartare per la seconda ipotesi data dal testo. Quindi rimangono solo 210210, 320320 e 310310. Si noti che 210210 è divisibile per 2, 3, 5, 7 e 11. Scomponendo il numero si trova che è anche divisibile per 91 (e quindi per 13), ma non per 31. Quindi è da scartare. Il numero 320320 si può riscrivere come $32 \cdot 10010$ e anche lui non è divisibile per 31. Rimane solo 310310 che, effettivamente, è divisibile per entrambi e rispetta la consegna. Il numero cercato è 310310. Per terminare il problema bisogna calcolare il quoziente della divisione tra 310310 e 2015, che vale 154. La risposta è `0154`.

Soluzione del problema 5. Tutte le permutazioni possibili del numero 2015 sono 4!. Fissata una cifra, le altre tre permutano in 3! modi; ad esempio), fissata la cifra delle unità, questa è presente 3! volte nella somma finale. La somma di una generica colonna di cifre (immaginando di fare la somma in colonna) è la somma delle cifre che la compongono. In particolare, basta sommare le cifre che sono presenti e moltiplicarle per le volte che esse si ripetono. La somma di una generica colonna è $S = (0 + 1 + 2 + 5) \cdot (3!) = 48$. Quindi la somma di tutte le colonne è S moltiplicata per la potenza di 10 appropriata. La somma di tutti i numeri è $48 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000) = 48 \cdot 1111 = 53328$.
La risposta è `5332`.

Soluzione del problema 6. I triangoli non equilateri sono tutti e soli quelli che hanno un lato appartenente all'esagono più grande. Da ognuno dei lati dell'esagono si formano 5 triangoli non equilateri, quindi i triangoli non equilateri sono $5 \times 6 - 6 = 24$(perché dobbiamo togliere una volta i 6 triangoli contati due volte, quelli con due lati appartenenti all'esagono più grande). Tutti gli altri triangoli sono equilateri, in particolare, se l è il lato dell'esagono più piccolo, ce ne sono 12 di lato l, 6 di lato $2l$, e 2 di lato $3l$. In totale sono quindi 20. Il prodotto è $24 \times 20 = 480$.
La risposta è `0480`.

Soluzione del problema 7. Si osserva che $a_1 = -\frac{1}{3}$, $a_2 = -2$, $a_3 = 3$, $a_4 = \frac{1}{2}$. La funzione è periodica, di periodo 4. Quindi $a_{2015} = 3$.
La risposta è `2003`.

Soluzione del problema 8. Siano $ABCD$ e $A'B'C'D'$ le basi del cubo (vertici omonimi stanno sullo stesso spigolo). Il triangolo $AA'C'$ è un triangolo rettangolo in A'. La perpendicolare passante per A' ad AC', quindi è l'altezza relativa all'ipotenusa AC'. Quindi possiamo applicare il primo teorema di Euclide, che fornisce la relazione $x \cdot (x + z) = \ell^2$, dove ℓ è la misura del lato del cubo. Sappiamo ora che la diagonale del cubo misura $\sqrt{3} \cdot \ell$, quindi $x + z = \sqrt{3} \cdot \ell$. Da qui si ha che $x \cdot \sqrt{3} \cdot \ell = \ell^2$ da cui si ricava $x = \dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$. Quindi $z = \sqrt{3} \cdot \ell - x = \ell \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Il rapporto cercato è quindi $\dfrac{z}{x} = 2$. La risposta è `2000`.

Soluzione del problema 9. Si noti inizialmente che il numero più grande che si può formare è $\sqrt{987} \approx 31.4$, quindi la somma da cercare è minore di 31. D'altro canto, la somma non può essere minore di $\sqrt{123} \approx 11.1$. Quindi il numero cercato appartiene all'intervallo $[12, 31]$. Notiamo che all'interno di questo intervallo ci sono numeri (come 12) il cui quadrato contiene due cifre uguali, dunque inaccettabili per l'obiettivo prefissato. Quindi bisogna escluderli. Questi numeri sono $12, 15, 20, 21, 22, 26, 30$. Rimangono quindi 13 numeri tra cui cercare: $13, 14, 16, 17, 18, 19, 23, 24, 25, 27, 28, 29, 31$. Dato che la minima somma possibile è quella con i numeri da 1 a 6, cioè $\binom{7}{2} = 21$, i numeri $13, 14, 16, 17, 18, 19$ sono da escludere. Rimangono $23, 24, 25, 27, 29, 31$. Si vede ora che
$23 = \sqrt{529} \qquad 1 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 29$ ↯
$24 = \sqrt{576} \qquad 1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9 = 27$ ↯
$25 = \sqrt{625} \qquad 1 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9 = 32$ ↯

$27 = \sqrt{729} \qquad 1+3+4+5+6+8 = 27$ ✓
$29 = \sqrt{841} \qquad 2+3+5+6+7+9 = 32$ ↯
$31 = \sqrt{961} \qquad 2+3+4+5+7+8 = 29$ ↯
Quindi la somma cercata è 27 ed il risultato è $27^2 = 729$.
La risposta è `0729`.

Soluzione del problema 10. Sia $n = 2016$ il numero di lati del poligono regolare. Osserviamo che un poligono regolare è sempre inscritto in una circonferenza, quindi un triangolo formato da tre dei suoi vertici è rettangolo se e solo se uno dei tre lati è un diametro.
I casi totali per ottenere un triangolo sono $\binom{n}{3}$. Per calcolare i casi favorevoli due vertici possono essere scelti diametralmente opposti in $\frac{n}{2}$ modi; per ognuno di essi abbiamo $n-2$ scelte possibili per il terzo vertice. Quindi in totale $\dfrac{n(n-2)}{2}$ casi favorevoli. La probabilità è perciò

$$\frac{\frac{n(n-2)}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{3}{n-1} = \frac{3}{2015}.$$

La risposta è `2018`.

Soluzione del problema 11. Poiché l'I.U. dispone di 499 fogli e il maggiordomo gliene ruba uno ogni volta che il primo sta fasciando un regalo, l'I.U. riesce al massimo a fasciare 250 pacchetti. Supponiamo che inizi a fasciare un pacchetto medio con un foglio medio. Successivamente fascia, se è possibile, un pacchetto della stessa grandezza del foglio che il maggiordomo ha appena rubato con un foglio di ugual misura. Se ciò non è possibile fascia con un foglio della stessa misura a quello appena rubato un pacchetto piccolo. In questo modo è facile verificare che l'I.U. fascia 250 regali, tutti con carta di ugual misura eccetto per 25 pacchetti piccoli fasciati con fogli grandi.
Supponiamo che ci sia una strategia che gli permetta di guadagnare più soldi. Siccome come già detto non è possibile che fasci più di 250 pacchetti, dovrà fasciare meno di 25 regali con carta di misura diversa. Ma questo non è possibile: infatti se il maggiordomo utilizzasse come strategia di rubare prima tutti i fogli piccoli, poi tutti i medi e poi tutti i grandi l'I.U. riuscirebbe a fasciare, con la carta di ugual misura, solo 25 pacchetti piccoli. Ne avanzerebbero perciò 75 e, nel migliore dei casi, 50 saranno non fasciati e 25 fasciati con fogli di misura differente.
L'I.U. quindi viene pagato al massimo $2€ \cdot 225 + 1€ \cdot 25 = 475€$.
La risposta è `0475`.

Soluzione del problema 12. Dato che $7 < 8$ il numero m cercato è pari. Inoltre $f\left(\frac{m}{2}+1\right)$ deve essere 1. Si noti che $f(k+1)$ è maggiore di 0 qualunque sia k. Si noti poi che $f(k) = 1$ se e solo se k è una potenza di 2 come si vede per induzione completa. Supposta vera per tutti gli $h < k$, i casi sono due: k è una potenza di 2 oppure no. Nel primo caso la proprietà è verificata grazie alla definizione per ricorsione. Nel secondo caso, k deve esere dispari e $f(k) = f(\ell) + f(\ell+1)$ per un numero ℓ appropriato maggiore di 0. Dunque $f(k) > 1$ e la proprietà è ancora verificata.
Inoltre $f(2^n - 1) = n$ per ogni n naturale come si vede facilmente per induzione, dato che $2^{n+1} - 1 = 2(2^n - 1) + 1$ e $f(2^{n+1} - 1) = f(2^n - 1) + f(2^n) = f(2^n - 1) + 1$. Dunque $8 = f(2^8 - 1) = f(255)$ e $7 = f(2^7 - 1) = f(2(2^7 - 1)) = f(254)$. Così $a_{254} = \frac{7}{8}$.
Anche se non necessario, si vede facilmente per induzione che due numeri che compaiono consecutivi nella successione $(f(n))_{n>1}$ sono primi fra loro e che effettivamente tutti i numeri razionali vengono elencati dalla successione $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
La risposta è `0254`.

Soluzione del problema 13. Chiamiamo sincero il sospettato che dice sempre il vero e sospetto ogni altro sospettato. Noi dobbiamo calcolare quante domande servono come minimo al poliziotto per capire il colpevole, qualsiasi siano le risposte dei sospettati. Quindi dobbiamo capire quali sono le risposte dei sospettati che obbligano il poliziotto a fare più domande. È evidente che non ha senso che il poliziotto rivolga a un sospettato più di una domanda al giorno e gliene bastano due per ottenere informazione certa. Questo perché se la prima volta un sospettato ha risposto che il colpevole è x, e la seconda volta ha risposto

che il colpevole è y (diverso da x), allora la terza volta può tornare a rispondere x, senza aggiungere informazione. Si ottiene informazione certa quando un sospettato ripete nel secondo giorno la risposta che ha dato nel primo: almeno $2015 + 2015 = 4030$ domande. Per farne meno, basta ottenere il primo giorno tre risposte diverse e chiedere nel secondo giorno a un sospettato per ciascun gruppo. Il caso peggiore è se il primo giorno si ottengono solo due risposte diverse: 1007 sospettati hanno risposto con un nome, 1008 hanno risposto con un altro. Quindi servono 2015 domande il primo giorno e a tutti quelli del gruppo di 1007 sospettati nel secondo. In totale sono $2015 + 1007 = 3022$.
La risposta è `3022`.

Soluzione del problema 14. Strategia di Sally: a ogni mossa lasciare la massima distanza minima possibile. Ad esempio, alla prima mossa cancella tutti i numeri dispari. In tal modo la distanza fra due numeri consecutivi sarà come minimo $2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ dopo la prima, seconda, terza, quarta, quinta, sesta e settima mossa rispettivamente.
Strategia di Harry: a ogni mossa lasciare la minima distanza massima possibile. In tal modo la distanza tra due numeri consecutivi sarà come massimo $2^{13}, 2^{12}, 2^{11}, 2^{10}, 2^9, 2^8, 2^7 = 128$ dopo la prima, seconda terza, quarta, quinta, sesta, settima mossa rispettivamente. Alla fine Sally ottiene 128 euro.
La risposta è `0128`.

Soluzione del problema 15. Sia ℓ il lato del cubo. Unendo nel modo descritto i centri delle facce, si ottiene un ottaedro. Il solido è composto da due piramidi uguali a base quadrata. L'altezza della piramide è $\frac{\ell}{2}$, l'area della base è $\frac{\ell^2}{2}$; dunque il volume di S è $2\frac{\ell^3}{12} = \frac{\ell^3}{6}$. Il rapporto richiesto vale $\frac{\ell^3}{\frac{\ell^3}{6}} = 6$.
La risposta è `0006`.

Soluzione del problema 16. Sia P la probabilità cercata. Allora

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot P + \frac{1}{3} \cdot (1 - P)$$

dove il primo termine della somma esprime il caso di uscita testa al primo lancio, il secondo di uscita fiamma e il terzo di uscita croce. Quindi $P = \frac{2}{3}$.
La risposta è `0005`.

Soluzione del problema 17. Notiamo che, se l'area seminata fino a quel momento è un rettangolo, entrambe le possibili semine del contadino la mantengono tale. In particolare, la prima semina restituisce un rettangolo con i lati rivolti a Est e Ovest allungati di due file di vasi, mentre la seconda ne restituisce uno in cui tutti i lati sono allungati di due file. Quindi, chiamato x il numero di semine del primo tipo e y quelle del secondo, alla fine dei 21 giorni il rettangolo avrà i lati rivolti a Nord e Sud composti da $2y + 1$ file di vasi, mentre quelli rivolti ad Est ed Ovest da $2x + 2y + 1$ file di vasi. Considerato che $x + 2y = 20$, deve valere che $0 \le y \le 10$. Ad ogni valore di y corrisponde uno ed un solo rettangolo. Viceversa ad ogni rettangolo corrisponde uno ed un solo valore y. Pertanto ci sono 11 configurazioni possibili.
La risposta è `0011`.

Soluzione del problema 18. Due osservazioni molto utili per svolgere l'esercizio; la prima è la seguente: se un numero primo è a specchio, allora è palindromo. Inoltre, i numeri minori che terminano con 5 e che sono a specchio sono facili da verificare. Dalla prima osservazione, si ha che tra i numeri minori di 300 i numeri primi a specchio sono 11, 101, 131, 151, 181, 191 . Di conseguenza, tra i numeri minori di 103, solo negli intervalli $]47, 53[$ e $]53, 59[$ possono esserci 5 numeri a specchio consecutivi. In $]47, 53[$ e $]53, 59[$ ci sono, rispettivamente, 51 e 54 che non sono a specchio. Per i numeri compresi tra 103 e 199, gli intervalli in cui possono comparire 5 numeri a specchio consecutivi sono soltanto $]115, 127[$, $]131, 137[$, $]139, 145[$, $]157, 163[$, $]167, 173[$, $]185, 191[$. In ciascuno di questi intervalli, si trovano i numeri 118 e 122 nel primo, poi rispettivamente 142, 160, 170, 188 che non sono a specchio. Dunque

non c'è una sequenza di 5 numeri a specchio. Nell'intervallo $]205, 211[$ 206, 207, 208, 209 e 210 sono tutti a specchio.
La risposta è `0210`.

Soluzione del problema 19. Conviene contare i modi per inserire due separatori tra 80 palline, cioè ai modi di ordinare 80+(3-1) elementi indipendentemente dall'ordine dei (3-1) elementi "separatori" e degli 80 elementi "palline", i modi sono $\dfrac{[80+(3-1)]!}{80!(3-1)!} = \binom{82}{2} = 41 \cdot 81$.
Dei tre numeri n, m e k, è impossibile che siano tutti uguali perché 80 non è divisibile per 3. Negli altri due casi, se due dei tre numeri n, m e k sono uguali, è necessario contare le coppie (a, b) tali che $b = 80 - 2a \geq 0$, che sono tante quanti i numeri a tali che $0 \leq a \leq 40$; dato che i numeri vengono poi ordinati in modo univoco, la stessa situazione si presenta in 3 modi di separazione; così i modi di separazione sono in totale $41 \cdot 3$. In ciascuno di questi casi la probabilità che il numero estratto sia uno dei due è $\dfrac{2}{81}$. Nel caso in cui i numeri n, m e k siano a due a due distinti, la probabilità che uno dei tre sia quello estratto è $\dfrac{3}{81}$; dato che i numeri vengono poi ordinati in modo univoco, la stessa situazione si presenta in $3! = 6$ modi di separazione. I casi in cui sono perciò $\dfrac{41 \cdot 81 - 41 \cdot 3}{6} = 41 \cdot 13$. La probabilità si calcola come

$$\frac{2}{81} \cdot \frac{41}{41 \cdot 13 + 41} + \frac{3}{81} \cdot \frac{41 \cdot 13}{41 \cdot 13 + 41} = \frac{41}{14 \cdot 81} = \frac{41}{1134}.$$

La risposta è `1175`.

Soluzione del problema 20. La diagonale principale è divisa in tre parti uguali. Sia ℓ la lunghezza del lato del cubo. La diagonale è lunga $\ell\sqrt{3}$. Il volume di una delle due piramidi è $\frac{\ell^3}{6}$. Dato che la diagonale principale è perpendicolare a una faccia della piramide che ha area $\ell^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$, l'altezza relativa a quella faccia è $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$ che è un terzo della lunghezza della diagonale.
La risposta è `1176`.

Soluzione del problema 21. Si devono contare le coppie ordinate (p, n), con p primo e $n \leq 200$ intero positivo, tale che $p^2 + np = k^2$, per qualche k intero.
Dato che $p^2 + np = p(p + n)$, si vede subito che, se $p^2 + np = q^2 + \ell q$, allora $p = q$ e $n = \ell$. Inoltre deve essere $p|k^2$; dunque $p|k$ poichè p è primo, cioè $k = mp$ per un unico intero positivo m. Sostituendo otteniamo $p + n = m^2 p$. Allora $n = (m^2 - 1)p$. Osserviamo subito che $2 \leq m \leq 10$, perché sennò $(m^2 - 1)p \geq (m^2 - 1)2 \geq 120 \cdot 2 = 240$.

m	$(m^2-1)p$	$\max\{p \mid p \text{ primo}, (m^2-1)p \leq 200\}$	coppie
2	$3p$	61	18
3	$8p$	23	9
4	$15p$	13	6
5	$24p$	7	4
6	$35p$	5	3
7	$48p$	3	2
8	$63p$	3	2
9	$80p$	2	1
10	$99p$	2	1
		totale	46

La risposta è `0046`.

Soluzione del problema 22. La probabilità che l'ultimo della coda abbia in tasca il 6 è $1/6$. In questo caso il gioco riesce se i rimanenti pensionati sono tutti già ordinati e la probabilità di questo evento è $1/5!$. Pertanto la probabilità che il gioco abbia successo in questo caso è: $1/6 \cdot 1/5!$. La probabilità invece che l'ultimo della coda non abbia in tasca il 6 è $5/6$. In questo caso la probabilità che il pensionato successivo abbia in tasca il 6 è $1/5$ e in questo caso il gioco riesce se tutti i rimanenti 4 pensionati sono già ordinati (1 caso su 4!). Allora la prima fase del gioco si ferma al secondo pensionato coinvolto e il gioco riesce con probabilità $5/6 \cdot 1/5 \cdot 1/4!$. La probabilità che il secondo pensionato non abbia in tasca il 6 è $4/5$. In questo caso il terzo pensionato coinvolto ha in tasca il 6 con probabilità $1/4$ e i 3 pensionati rimanenti sono ordinati con probabilità $1/3!$. Pertanto la probabilità di essere in questa situazione è $5/6 \cdot 4/5 \cdot 1/4 \cdot 1/3!$ e così via. In conclusione il gioco riesce con probabilità:

$$\frac{1}{6!} + \frac{5}{6!} + \frac{5 \cdot 4}{6!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6!} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6!} = \frac{163}{360}.$$

La risposta è `0523`.

Soluzione del problema 23. Si costruiscono le parallele $NP \parallel AC$ con P su AB, $NQ \parallel AB$ con Q su AC, $MR \parallel AC$ con R su AB e $MT \parallel AB$ con T su AC. Si ottengono le relazioni

$$\frac{BN}{BC} = \frac{PN}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{BC}{CN} = \frac{AB}{NQ}$$

Perciò

$$\frac{BN}{CN} = \frac{PN \cdot AB}{AC \cdot AP}$$

Inoltre, gli angoli $\widehat{ATM}$ e $\widehat{APN}$ sono uguali in quanto angoli opposti di un parallelogrammo. Perciò i triangoli APN e ATM sono simili; quindi $\frac{AP}{AT} = \frac{PN}{TM}$. Ne risulta

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AT}{TM} = \frac{AC}{AB}.$$

In conclusione

$$\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2} = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2.56.$$

La risposta è `2560`.

Soluzione del problema 24. Siccome la pescata è totalmente casuale i casi possibili che si possono presentare prima del lancio sono 6, simmetrici a coppie. È chiaro quindi che la domanda è capire quanti sono i casi in cui entrambi i sacerdoti ottengono lo stesso numero: infatti, supposto un risultato in cui uno dei due supera l'altro, in un caso Kant perderà, ma nel caso simmetricamente opposto vincerà o viceversa. Dovremmo quindi andare ad analizzare nello specifico tre situazioni: uno pesca i dadi da 4 e da 6 e l'altro quelli da 8 e da 12, uno 4 e 8 e l'altro 6 e 12, e infine uno da 4 e da 12 e l'altro da 6 e da 8. Si disegnano perciò 3 tabelle con i possibili risultati e i conseguenti modi di ottenere questi ultimi; contare i casi non è complicato. Per la prima situazione contiamo 119 modi su 2304 ($4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12$) di ottenere due risultati uguali, per la seconda 158 e per la terza 181: 458 in totale quindi. Vediamo come:

$4-6$			$8-12$		
somma	modi		somma	modi	
2	1		2	1	$1 \cdot 1 = 1\ +$
3	2		3	2	$2 \cdot 2 = 4\ +$
4	3		4	3	$3 \cdot 3 = 9\ +$
5	4		5	4	$4 \cdot 4 = 16\ +$
6	4		6	5	$4 \cdot 5 = 20\ +$
7	4		7	6	$4 \cdot 6 = 24\ +$
8	3		8	7	$3 \cdot 7 = 21\ +$
9	2		9	8	$2 \cdot 8 = 16\ +$
10	1		10	8	$1 \cdot 8 = 8\ =$
					119

$4-8$		$6-12$		
somma	modi	somma	modi	
2	1	2	1	$1 \cdot 1 = \ \ 1 +$
3	2	3	2	$2 \cdot 2 = \ \ 4 +$
4	3	4	3	$3 \cdot 3 = \ \ 9 +$
5	4	5	4	$4 \cdot 4 = 16 +$
6	4	6	5	$4 \cdot 5 = 20 +$
7	4	7	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
8	4	8	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
9	4	9	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
10	3	10	6	$3 \cdot 6 = 18 +$
11	2	11	6	$2 \cdot 6 = 12 +$
12	1	12	6	$1 \cdot 6 = \ \ 6 =$
				158

$4-12$		$6-8$		
somma	modi	somma	modi	
2	1	2	1	$1 \cdot 1 = \ \ 1 +$
3	2	3	2	$2 \cdot 2 = \ \ 4 +$
4	3	4	3	$3 \cdot 3 = \ \ 9 +$
5	4	5	4	$4 \cdot 4 = 16 +$
6	4	6	5	$4 \cdot 5 = 20 +$
7	4	7	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
8	4	8	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
9	4	9	6	$4 \cdot 6 = 24 +$
10	4	10	5	$4 \cdot 5 = 20 +$
11	4	11	4	$4 \cdot 4 = 16 +$
12	4	12	3	$4 \cdot 3 = 12 +$
13	4	13	2	$4 \cdot 2 = \ \ 8 +$
14	3	14	1	$3 \cdot 1 = \ \ 3 =$
				181

Perciò la probabilità cercata sarà $\dfrac{2304 \cdot 3 - 458}{2304 \cdot 6}$; ridotta ai minimi termini $\dfrac{3227}{6912} \approx 0.466869$.
La risposta è `4668`.