Soluzioni per la Coppa Galileo 2014

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Matteo Bobbio, Luca De Stefano, Mattia Fecit, Simone Gardella, Fulvio Gasparini, Alessandro Logar, Stefano Mereta, Francesco Morandin, Alessandro Murchio, Matteo Musso, Milo Orlich, Maurizio Paolini, Ludovico Pernazza, Edi Rosset, Valentina Trapani.

MISTERIUS sa di aver fatto una domanda scomoda: «Esistono numeri più importanti di altri?»([1]) Siamo convinti che, oltre al fondamentale `653424318` di cui abbiamo già parlato, ce ne siano altri 24 molto importanti. Li elenchiamo nel seguito con molte parole intorno che tanti troveranno inutili. Sembra incredibile, ma sono tutti numeri minori di 10˙000. Sarà un caso?

Soluzione del problema 1. Dai dati del problema si ha che le conversioni tra ctrome, centimetri e cmotre e tra loki, chili e koli sono le seguenti:

ctrome	cm	cmotre
15	70	7
3	14	7/5

loki	kg	koli
40	2/3	3
120	2	9

da cui si ottiene che 1 cmotre sono 10 cm, quindi 1 cmotre^3 corrisponde a 1 dm^3, quindi 20 cmotre^3 sono 1200 loki.
La risposta è `1200`.

Soluzione del problema 2. $\dfrac{6!}{6^6} = \dfrac{5}{3^2 \cdot 6^2} = \dfrac{5}{324}$
La risposta è `0329`.

Soluzione del problema 3. $f(6) = f(2 \cdot 3) = 4(f(1+2)) + 6 = 4(f(1) + 12 \cdot 2) + 6 = 106$.
La risposta è `0106`.

Soluzione del problema 4. $[\sqrt{1}] = 1$ e $[\sqrt{n}]$ aumenta di 1 in corrispondenza dei quadrati perfetti, cioè ogni numero $1 \leq k \leq 6$ compare tante volte quanto $2k+1$ e 7 compare 2 volte. Quindi la somma delle parti intere è $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 6 \cdot 13 + 7 \cdot 2 = 2\frac{6(6+1)(2 \cdot 6+1)}{6} + \frac{6(6+1)}{2} + 7 \cdot 2 = 217$.
La risposta è `0217`.

Soluzione del problema 5. Un taglio eseguito da una formina aumenta la superficie del parallelepipedo di 50 cm^2. L'area è $2 \times 50^2 + 4 \times 5 \times 50 + 4 \times 50 = 6200$.
La risposta è `6200`.

Soluzione del problema 6. I numeri n sono al massimo di 7 cifre; poiché è divisibile per 6 deve essere pari, quindi l'ultima cifra deve essere 0. Essendo inoltre divisibile per 3, la somma delle sue cifre deve essere divisibile per 3, quindi deve essere 3 o 6. Se la somma è 6, il numero contiene una cifra 0 ed è 1111110; altrimenti, il numero contiene 4 cifre 0 di cui una alla fine: le combinazioni possibili sono $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$. Quindi esistono $20 + 1 = 21$ numeri n che soddisfano le tre proprietà.
La risposta è `0021`.

Soluzione del problema 7. La risposta è $\frac{1400 \cdot 7 \cdot 2014}{1600 \cdot 3} = 4111$. Basta vedere che 1600 resta sempre al denominatore della "frazione finale", ma da solo è troppo poco: fa superare 9999. Ci sono tre modi per aggiungere solo il 3 al denominatore, quanto basta per stare sotto a 9999.
La risposta è `4111`.

([1]) Leo Ortolani, Comics&Science, pp. 32+iv, Istituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone"–Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma, ottobre 2013.

Soluzione del problema 8. Vista l'imposizione sulla lunghezza del lato, per massimizzare il perimetro deve essere il cateto minore lungo 25 m. Si cercano dunque due numeri naturali a e b—necessariamente diversi, diciamo $a > b$—tali che $25^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ tali che la somma $a + b$ sia massima, di conseguenza tali che $a - b$ sia minima. Dato che, per ogni n naturale, $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$, basta porre $a + b = 2n + 1 = 625$, cioè $a + b + 25 = 650$.
La risposta è `0650`.

Soluzione del problema 9. Dato che $2000 = 5^3 \cdot 2^4$, delle cinque cifre tre dovranno essere 5, le altre due tali che il loro prodotto sia 16, quindi 2 e 8 oppure 4 e 4. Nel caso 5, 5, 5, 2, 8 ci sono $\dfrac{5!}{3!} = 20$ combinazioni. Nel caso 5, 5, 5, 4, 4 ci sono $\dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ combinazioni.
La risposta è `0030`.

Soluzione del problema 10. Poiché il triangolo è rettangolo, l'ipotenusa corrisponde al diametro del cerchio esterno. Quindi $2 \cdot R = \sqrt{16^2 + 30^2}$ da cui $R = 17$. L'area del triangolo è $\dfrac{16 \cdot 30}{2} = 240$. Vedendo il triangolo diviso in tre triangoli di altezza r e base ciascuno dei lati si trova che $\dfrac{16 \cdot r + 30 \cdot r + 34 \cdot r}{2} = \dfrac{80 \cdot r}{2} = 240$ da cui $r = 6$. Quindi $R + r = 23$.
La risposta è `0023`.

Soluzione del problema 11. Si tratta di contare: 2014 pizze l'anno scorso si sarebbero pagate 8056€. Quest'anno, con Alice si paga 10 volte per le prime 11 pizze, e poi solo 9 volte ogni 10; dato che $2014 = 11+200\cdot 10+3$, quindi in totale si pagano $(10+200\times 9+3)\times 4.50$€ $=$ 8158.50€. Con Elena si pagano 10 pizze ogni 11; $2014 = 183 \cdot 11 + 1$, e quindi in totale $(183 \cdot 10 + 1) \times 4.50$€ $= 8239.50$€.
La risposta è `0102`.

Soluzione del problema 12. Fermi deve ottenere 7. Dato che ogni risultato sul dado con minor numero di facce c'è un unico risultato sull'altro dado, le probabilità di vittoria sono 1/6 con la coppia di dadi a 4 facce e a 6 facce, 1/8 negli altri due casi con il dado a 8 facce. La probabilità peggiore per Fermi è $\frac{1}{8}$; quella migliore per Bagolot è $\frac{7}{8} = 0.875$.
La risposta è `8750`.

Soluzione del problema 13. Sia $r = 10\,\mathrm{m}$. Il lato del triangolo è $r\sqrt{3}$; il lato del quadrato è $r\sqrt{2}$. La parte di triangolo equilatero che rimane scoperta dal quadrato consiste delle aree di due triangoli equilateri: uno ha altezza $r - \frac{r\sqrt{2}}{2} = r\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ e area $r^2\dfrac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}{12}$; l'altro ha lato $r\sqrt{3} - r\sqrt{2} = r(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ e area $r^2\dfrac{5\sqrt{3} - 6\sqrt{2})}{4}$. L'area cercata è

$$\begin{aligned} r^2\left(\pi - 2 - \tfrac{6\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{12} - \tfrac{5\sqrt{3}-6\sqrt{2})}{4}\right) &= r^2\left(\pi - 2 - \tfrac{7}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{3}\sqrt{6} + \tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right) \\ &\approx 104.8\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

La risposta è `0104`.

Soluzione del problema 14. $0.\overline{9F5} = \dfrac{9F5}{999}$. Quindi $\dfrac{n}{810} = \dfrac{9F5}{999}$, cioè $37 \cdot n = 30 \cdot (9F5)$. Perciò $37|9F5$: i multipli di 37 compresi tra 900 e 1000 sono 925 e 962 (e 999), così $F = 2$ e $n = \dfrac{30 \cdot 925}{37} = 750$.
La risposta è `2750`.

Soluzione del problema 15. Siano X, Y e Z le superfici delle tre facce e siano a, b, c le tre dimensioni del solido. Senza perdita di generalità, possiamo assumere che $a \cdot b = X$, $b \cdot c = Y$ e $a \cdot c = Z$. Il volume del solido è dato dalla formula $V = a \cdot b \cdot c$. Notiamo che $a \cdot b \cdot c = \sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = \sqrt{(a \cdot b) \cdot (b \cdot c) \cdot (a \cdot c)} = \sqrt{X \cdot Y \cdot Z}$. Quindi, il volume del solido cercato è la radice quadrata del prodotto delle superfici delle tre aree: $X = 429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$, $Y = 364 = 4 \cdot 7 \cdot 13$, $Z = 231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.
$\sqrt{X \cdot Y \cdot Z} = \sqrt{(3 \cdot 11 \cdot 13) \cdot (4 \cdot 7 \cdot 13) \cdot (3 \cdot 7 \cdot 11)} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2} = 2\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13 =$ 6006.

La risposta è 6006.

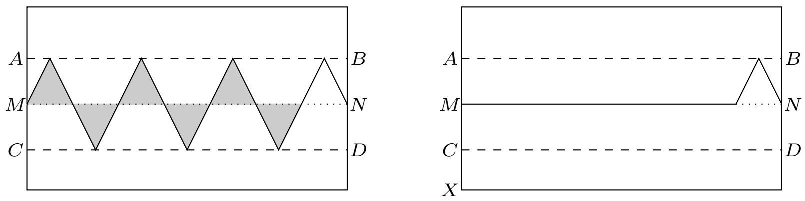
Soluzione del problema 16. $k > 9$ non fornisce numeri confusi, perché il prodotto $n \cdot k$ aumenta il numero di cifre, rendendo il problema senza soluzioni. Per questa ragione per $k = 5, 6, 7, 8, 9$ la prima cifra di n deve essere 1, l'ultima cifra moltiplicata per k deve essere uguale alla prima. Questo esclude subito soluzioni dai casi $k = 5, 6, 7, 8$.
Nel caso $k = 9$ si ha che il numero è del tipo $1xy9$, ed è multiplo di 9, perché deve esserlo se letto al contrario. Quindi è 1089, perché per x più grandi il prodotto $n \cdot k$ aumenterebbe il numero di cifre.
Nel caso $k = 4$ con la stessa argomentazione la prima cifra deve essere 1 o 2, ma il numero letto al contrario è multiplo di 4, quindi non può essere 1. Allora la prima cifra è 2 e l'ultima è $2 \cdot 4$, e il numero diventa del tipo $2xy8$, e deve valere $2xy8 \cdot 4 = 8yx2$ da cui $4 \cdot (10x + y) + 3 = 10y + x$. Così $39x + 3 = 6y$ e $13x + 1 = 2y$. Quindi $x = 1, y = 7$ e il numero è 2178.
Nel caso $k = 3$ la prima cifra deve essere 1, 2, 3, e l'ultima corrispondentemente 7, 4, 1, da cui $1xy7 \cdot 3 = 7yx1$, oppure $2xy4 \cdot 3 = 4yx2$, oppure $3xy1 \cdot 3 = 1yx3$. dal confronto delle cifre delle migliaia si deduce che sono tutti e tre casi assurdi.
Nel caso $k = 2$ la prima cifra deve essere pari e minore di 5, cioè 2 o 4, e l'ultima corrispondentemente 1, 6 o 2, 7 da cui $2xy1 \cdot 2 = 1yx2$ oppure $2xy6 \cdot 2 = 6yx2$ oppure $4xy2 \cdot 2 = 2yx4$ oppure $4xy7 \cdot 2 = 7yx4$. Dal confronto delle cifre delle migliaia si deduce che sono tutti e quattro casi assurdi.
Nel caso $k = 1$ i numeri che soddisfano la proprietà richiesta sono quelli palidromi, ovvero del tipo $xyyx$, $x = 1, 2, \dots, 9$, $y = 0, 1, \dots, 9$ che sono 90.
Il totale dei numeri confusi è quindi $90 + 2$.
La risposta è 0092.

Soluzione del problema 17. Le due affermazioni ripetute indicano che, per isolani con numero $2a+1$, $2a+2$ e $2a+3$ (con $0 \le a < 1005$), la natura di $2a+3$ è diversa sia da quella di $2a+1$ che da quella di $2a+2$ (che perciò coincidono):

$2a+1$	$2a+2$	$2a+3$		$2a+1$	$2a+2$	$2a+3$
sincero	sincero	bugiardo		bugiardo	bugiardo	sincero

Dato che non si sa nulla del primo, i casi possibili sono due, ma la natura del primo determina quella di tutti gli isolani fino al 2103-esimo che, riguardo al dire la verità, si alternano a gruppi di due. La natura del 2013-esimo è diversa da quella dall'ultimo. Perciò i bugiardi sono 1007.
La risposta è 1007.

Soluzione del problema 18. I triangoli dello stesso colore in figura sono congruenti



Quindi il problema diventa quello di trovare a che altezza tracciare la spezzata della seconda figura in modo che il rettangolo sia diviso in due parti di area uguale. Il triangolo ha area $\alpha = 2\,\text{cm}^2$. Sia $b = 14\,\text{cm}$, $\ell = \frac{4}{7}14\,\text{cm} = 8\,\text{cm}$; quindi la distanza $h = MX$ deve essere tale che $b \cdot h + \alpha = b(\ell - h) - \alpha$, cioè $h = \frac{\ell}{2} - \frac{\alpha}{b} = 4\,\text{cm} - \frac{2}{14}\,\text{cm} \approx 3.857\,\text{cm}$. La risposta è 0385.

Soluzione del problema 19. È sufficiente calcolare i numeri torrici non nulli, cioè quelli originati da disposizioni in cui nessuna torre occupa una casella 0. Lavoriamo sulle prime 3 righe e sia $c = (c_1, c_2, c_3)$ la terna dei numeri delle caselle occupate nella prima, seconda e terza riga rispettivamente. Distinguiamo 4 casi in cui si ha la scelta di un 2 sulla prima riga ($c_1 = 2$).

$c = (2, 2, 2)$. Tale caso si ottiene in $2^3 = 8$ modi (scelto in 2 modi un 2 nella prima riga, si può scegliere in 2 modi un 2 nella seconda riga, e ancora in 2 modi un 2 nella terza riga). A questo punto sulla quarta riga si può scegliere: a) un 2 in un solo modo e allora si ha la scelta obbligata di 2 nelle ultime due righe in un solo modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a 2^6; b) un 1 in un solo modo e allora si ha la scelta obbligata di 1 nelle ultime due righe in un solo modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a $2^3 1^3$. Quindi in totale da questo caso si ha $8 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^3 1^3$.
$c = (2, 2, 1)$. Tale caso si ottiene in $2^2 = 4$ modi (scelto in 2 modi un 2 nella prima riga, si può scegliere in 2 modi un 2 nella seconda riga, e in un solo modo un 1 nella terza riga). A questo punto sulla quarta riga si può scegliere: a) un 2 in un solo modo ma allora nella quinta riga si deve scegliere 0, e lo scartiamo; b) un 1 in due modi e allora si ha la scelta obbligata di 1 nella quinta e 2 nella sesta in un solo modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a $2^3 1^3$. Quindi da questo caso si ha $8 \cdot 2^3 1^3$.
$c = (2, 1, 2)$. Tale caso si ottiene in $2^2 = 4$ modi (scelto in 2 modi un 2 nella prima riga, si può scegliere in 1 modo un 1 nella seconda riga, e in 2 modi un 2 nella terza riga). A questo punto si ha la seguente scelta obbligata: nella quarta riga di 1 in un modo, nella quinta di 2 in 2 modi e nella sesta di 1 in un solo modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a $2^3 1^3$. Quindi da questo caso si ha $8 \cdot 2^3 1^3$.
$c = (2, 1, 1)$. Tale caso si ottiene in $2^2 = 4$ modi (scelto in 2 modi un 2 nella prima riga, si può scegliere in 1 modo un 1 nella seconda riga, e in 2 modi un 1 nella terza riga). A questo punto si ha la seguente scelta obbligata: nella quarta riga di 1 in un 2 modi, nella quinta di 2 in 1 modo e nella sesta di 2 in un modo; si hanno 8 numeri torrici uguali a $2^3 1^3$. Quindi da questo caso si ha $8 \cdot 2^3 1^3$.
Per simmetria, i casi in cui $c_1 = 1$, danno questi risultati:
$c = (1, 1, 1)$: $8 \cdot 1^6 + 8 \cdot 2^3 1^3$.
$c = (1, 1, 2)$: $8 \cdot 2^3 1^3$.
$c = (1, 2, 1)$: $8 \cdot 2^3 1^3$.
$c = (1, 2, 2)$: $8 \cdot 2^3 1^3$.
In totale si ha $8 \cdot 2^6 + 8 \cdot 1^6 + 8 \cdot 8 \cdot 2^3 1^3 = 1.032$.
La risposta è `1032`.

Soluzione del problema 20. Sia $s(n)$ il contorno additivo di n e $p(n)$ il contorno moltiplicativo, cosicché $c(n) = s(n) + p(n)$. Per $n = 1$ si ottiene la seguente successione

$$1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10, 2, \dots$$

che assume tutti i valori fra 1 e 18; dunque i numeri n tali che $1 \leq n \leq 18$ sono da escludere. Se $n = 10 \cdot A + B$, si ha che $c(n) = A + B + A \cdot B$. Si osservi che, per $9 < n \leq 100$, si ha che $c(n) = A + B + A \cdot B \leq 10 \cdot A + B \leq n$; in particolare,

$$c(n) = n \text{ se e solo se } n = 10k - 1, k = 2, \dots, 10$$

dato che, per $n = 10A + B$ con $A \neq 0$,

$$A + B + A \cdot B = 10 \cdot A + B \Leftrightarrow A(9 - B) = 0 \Leftrightarrow B = 9.$$

Dunque, per $n \in \{19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99\}$, la successione è costante di valore n; in particolare, non assume valore 11.
Sia S l'insieme degli n richiesti. Si ha che $n \in S$ se e solo se $c(n) \in S$. Se m è il numero che si ottiene invertendo l'ordine delle cifre di n, allora $c(n) = c(m)$. Dunque anche $91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98 \in S$, mentre i multipli di 10 non sono in S. Controlliamo incrementalmente (colonna per colonna, dato che per questi $c(n) < n$) i numeri rimanenti limitandoci al caso $n = 10 \cdot A + B$ con $A < B$:

$c(22) = 8 \notin S$		
$c(23) = 11 \notin S$	$c(33) = 15 \notin S$	
$c(24) = 14 \notin S$	$c(34) = 19 \in S$	$c(44) = 24 \notin S$
$c(25) = 17 \notin S$	$c(35) = 23 \notin S$	$c(45) = 29 \in S$
$c(26) = 20 \notin S$	$c(36) = 27 \notin S$	$c(46) = 34 \in S$
$c(27) = 23 \notin S$	$c(37) = 31 \notin S$	$c(47) = 39 \in S$
$c(28) = 26 \notin S$	$c(38) = 35 \notin S$	$c(48) = 44 \notin S$

$c(55) = 35 \notin S$
$c(56) = 41 \notin S \quad c(66) = 48 \notin S$
$c(57) = 47 \in S \quad c(67) = 55 \notin S \quad c(77) = 53 \notin S$
$c(58) = 53 \notin S \quad c(68) = 62 \notin S \quad c(78) = 71 \notin S \quad c(88) = 80 \notin S$

A quelli trovati vanno aggiunti i numeri con le cifre invertite: $43, 54, 64, 74, 75$.
Le soluzioni in totale sono $9 + 8 + 5 + 5 = 27$.
La risposta è 0027.

Soluzione del problema 21. L'idea iniziale è quella di scomporre 466 e trovare il numero minimo di '1' che si utilizzano. La fattorizzazione migliore si trova notando che

$$\begin{aligned} 466 &= 1 + 3 \times 5 \times 31 = 1 + 3 \times 5 \times (1 + 2 \times 3 \times 5) \\ &= 1 + (1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1) \times (1 + (1 + 1)\times \\ &\qquad \times(1 + 1 + 1) \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1)). \end{aligned}$$

In questa scomposizione si usa solamente 20 volte il carattere '1'. In qualunque altra, si utilizza almeno 22 volte il carattere '1'.
La risposta è 0020.

Soluzione del problema 22. Si cercano gli elementi della coppia nucleo K della funzione

$$(m, k) \mapsto (m + k)^2 - m^2 = 2km + k^2 : \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}^2 \to \mathbb{N}$$

coristretta all'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 100\}$. Consideriamo le fibre della relazione al variare di k:

$$\begin{array}{ll} K_1 = \{2m + 1 \mid 0 < m \le 49\} & K_2 = \{4m + 4 \mid 0 < m \le 23\} \\ K_3 = \{6m + 9 \mid 0 < m \le 15\} & K_4 = \{8m + 16 \mid 0 < m \le 10\} \\ K_5 = \{10m + 25 \mid 0 < m \le 7\} & K_6 = \{12m + 36 \mid 0 < m \le 5\} \\ K_7 = \{14m + 49 \mid 0 < m \le 3\} & K_8 = \{16m + 64 \mid 0 < m \le 2\} \\ K_9 = \{18m + 81 \mid 0 < m \le 1\} & \end{array}$$

Dalle prime due si vede che tutti i numeri dispari maggiori di 1 si scrivono come differenza di quadrati positivi e tutti i numeri pari che si scrivono come differenza di quadrati sono i multipli di 4 maggiori di 4.
Perciò la somma richiesta consiste di quei numeri che si trovano in $K_3 \cup K_5 \cup K_7 \cup K_9$ o in $K_4 \cup K_6 \cup K_8$, cioè gli insiemi

$$K_3 \cup \{35, 45, 55, 65, 75, 85, 95, 63, 77, 91, 99\}$$

e

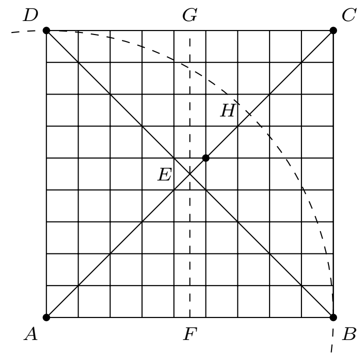
$$K_4 \cup \{48, 60, 72, 84, 96, 80, 96\}$$

Dunque la somma è

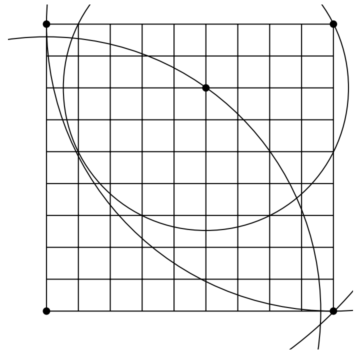
$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{m=1}^{15}(6m + 9) + 35 + 55 + 65 + 85 + 95 + 77 + 91 + \sum_{m=1}^{10}(8m + 16) + 60 + 84 = \\ &\qquad = 6\tfrac{15\cdot 16}{2} + 9 \cdot 15 + 503 + 8 \cdot \tfrac{10\cdot 11}{2} + 16 \cdot 10 + 144 \\ &\qquad = 720 + 135 + 503 + 440 + 160 + 144 = 2102 \end{aligned}$$

La risposta è 2102.

Soluzione del problema 23. Diciamo che la formica si trova nel vertice $(0, 0)$.
Si consideri il quadrato con il percorso che passa per i pioli $(5, 5)$, $(9, 9)$, $(9, 0)$ e $(0, 9)$.
Per simmetria, basta considerare i casi in cui il secondo piolo si trova nel triangolo ACD.
Ogni percorso il cui secondo piolo non si trova all'interno dell'arco di circoferenza non può completarsi in modo che sia più lungo di un percorso su tre lati.
Ogni percorso il cui secondo piolo è nel trapezio $AFED$ non pò completarsi in modo che sia più lungo di quello indicato.
Si verifica poi che anche se il secondo piolo si tro-



va nell'altro triangolo DEG non ci sono percorsi a completare che superano la lunghezza del percorso indicato.
Si tratta a questo punto di determinare se è possibile trovare un percorso il cui secondo piolo si trova nella parte dell'arco di circoferenza tra i segmenti EC e EG.
A questo punto si verifica che il percorso più lungo è quello che ha i pioli in $(5,7)$, $(9,9)$, $(9,0)$ e $(0,9)$ e ha lunghezza



$$100\left(\sqrt{74}+\sqrt{20}+9+9\sqrt{2}\right)\approx 3480.2383.$$

La risposta è 3480.

Soluzione del problema 24. Il problema è diviso in due parti, in primo luogo dobbiamo calcolare quanto vale $a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)$.
$a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)=a(ab+ac)+b(ab+bc)+c(ac+bc)=$
$=a(ab+ac+bc)+b(ab+bc+ac)+c(ac+bc+ab)-3abc=$
$=(ab+bc+ac)(a+b+c)-3abc=2\times\frac{11}{2}-3\times(-3)=20.$
Ora dobbiamo calcolare il minimo k tale che la prima cifra di 20^k abbia prima cifra a sinistra 7, e lo stesso per 9. Dato che $20^k=10^k\times 2^k$, basta lavorare con 2^k. Osserviamo che $2^{k+10}=2^k\times 1024=2^k\times 1000+2^k\times 24$. Allora se la prima cifra da sinistra di 2^k è x, le prime cifre da sinistra di 2^{k+10} sono x o $x+1$. Quindi per trovare il più piccolo con prima cifra 7, iniziamo con $2^6=64$. Indichiamo con $a_{(4)}$ le prime 4 cifre da sinistra di a e con $a_{(3)}$ le prime 3 cifre da sinistra di a.
$(2^{16})_{(4)}\leq(2^6\times 1000)_{(4)}+(2^6\times 24)_{(3)}=6400+153=6553.$
$(2^{26})_{(4)}\leq(2^{16}\times 1000)_{(4)}+((2^{16})_{(4)}\times 24)_{(3)}=6553+157=6710.$
$(2^{36})_{(4)}\leq(2^{26}\times 1000)_{(4)}+((2^{26})_{(4)}\times 24)_{(3)}=6710+161=6871.$
$(2^{46})_{(4)}\leq(2^{36}\times 1000)_{(4)}+((2^{36})_{(4)}\times 24)_{(3)}=6871+164=7035.$
Gli errori commessi in ogni passaggio possono essere al massimo di un'unità. Quindi possiamo concludere che $k_1=46$. Infine, per trovare il più piccolo D_k con prima cifra 9, iniziamo con $2^3=8$. $(2^{13})_{(4)}\leq(2^3\times 1000)_{(4)}+(2^3\times 24)_{(3)}=8000+192=8192.$
$(2^{23})_{(4)}\leq(2^{13}\times 1000)_{(4)}+((2^{13})_{(4)}\times 24)_{(3)}=8192+196=8388.$
$(2^{33})_{(4)}\leq(2^{23}\times 1000)_{(4)}+((2^{23})_{(4)}\times 24)_{(3)}=8388+201=8589.$
$(2^{43})_{(4)}\leq(2^{33}\times 1000)_{(4)}+((2^{33})_{(4)}\times 24)_{(3)}=8589+206=8795.$
$(2^{53})_{(4)}\leq(2^{43}\times 1000)_{(4)}+((2^{43})_{(4)}\times 24)_{(3)}=8795+211=9006.$
Quindi $k_2=53$ e $k_1\times k_2=2438$.
La risposta è 2438.

Un particolare ringraziamento a Leo Ortolani