Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1,4142$ $\quad\sqrt{3} = 1,7321$ $\quad\sqrt{7} = 2,6458$ $\quad\pi = 3,1416$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata consegnando l'apposito cartellino al tavolo della giuria.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani al tavolo delle domande.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

(1) In ogni problema, a fianco del titolo, compare il nome dell'autore del testo.

11 Marzo 2011

Coppa Fermat – Testi dei problemi

1. Bunsceroli onesti e disonesti (Giuseppe Rosolini)

James Bond è in azione sull'isola di Bunscerol nella Guyana Francese, abitata soltanto da 2011 membri della SPECTRE. Per sua fortuna, ogni bunscerolo (=abitante su Bunscerol) ha la caratteristica di dire sempre il vero o di dire sempre il falso. Sente un guardiano mormorare: «I busceroli che dicono il vero sono tanti quanti i bunsceroli che dicono il falso». Quanti sono al massimo coloro che dicono sempre il vero?

2. Il primo grattacielo (Giuseppe Rosolini)

Un grattacielo è a forma cilindrica con base di perimetro 150 m, le pareti alte 160 m, il tetto a forma conica con la stessa base del cilindro e alto 20 m. Grazie a ventose che gli permettono di muoversi in qualunque direzione sulla superficie liscia del palazzo, 007 sta scalando il grattacielo per posizionare tre bombe esattamente 30 m sotto la grondaia alla base del tetto e alla stessa distanza una dall'altra. Ha appena fissato la seconda e deve andare nel punto dove fissare la terza. Qual è la lunghezza in metri della distanza minima che deve percorrere?

3. Un edificio strano (Francesco Morandin)

James Bond ha davanti un disegno che mostra un triangolo con i tre vertici marcati A, B e C; vede segnata poi una parallela al lato AC che interseca BC in M e AB in P. Infine, è stata tracciata una parallela a BC che interseca AB nel suo punto medio D, PM in E e AC in F. Senza strumenti di misurazione, James riesce solo a determinare che il rapporto $\frac{MB}{MC}$ è 10. Per avere un'idea di che tipo di edificio sia rappresentato nel disegno, James determina il rapporto tra l'area del triangolo PDE e quella del quadrilatero $PAFE$. Quanto vale mille volte il rapporto calcolato da James?

4. Le due radure (Giuseppe Rosolini)

Due radure, una quadrata, l'altra a forma di triangolo equilatero, hanno lo stesso perimetro. La SPECTRE vuole renderle circolari e il lavoro viene fatto estendendole il meno possibile. Qual è il rapporto tra l'area circolare più piccola e l'area circolare più grande?
Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola.

5. Passatempi galeotti (Francesco Morandin)

James Bond è stato imprigionato dai bunsceroli. Per passare il tempo fa la somma dei quadrati perfetti (cioè numeri che sono quadrati di numeri interi positivi) della forma $\frac{n}{4000-n}$ per n intero. Che risultato trova?

6. Un gioco di tre dadi (Lorenzo Bergallo)

Dr. No sfida Bond a un gioco con tre dadi: uno con 4 facce numerate da 1 a 4, uno con 6 facce numerate da 1 a 6 e l'ultimo dado con 8 facce numerate da 1 a 8. Bond deve tirare tutti i dadi due volte e sommarne le facce. Potrà lasciare l'isola se il risultato che ottiene è uguale a 14, altrimenti verrà gettato in prigione. James tira una volta tutti e tre i dadi insieme, ottenendo 5 come somma dei numeri sulle facce. Qual è la probabilità di Bond di non venir gettato in prigione?
Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

7. Al sole (Marco Caselli)

Coricati al sole sulla spiaggia dell'isola di Bunscerol, 007 intrattiene Honey parlandole dei polinomi celebri. I polinomi celebri sono quei polinomi $P(x)$ di grado al massimo 11, che si ottengono sommando alcune potenze distinte della variabile x e tali che $P(1) = 5$ e $P(-1) = 1$. Ad esempio, $x^8 + x^4 + x^3 + x + 1$ è celebre mentre $x^2 + x + 1$ e $2x^2 + 2x + 1$ non sono celebri. James si gira verso Honey e le chiede con voce suadente quanti sono i polinomi celebri che, calcolati in 2, danno valori maggiori di 2011. Che cosa risponde Honey da brava matematica?

8. Apro o non apro? (Giuseppe Rosolini)

L'edificio centrale ha moltissime porte d'accesso, ma quasi tutte sono protette da esplosivo. 007 ha scoperto che le uniche porte che non sono protette da esplosivo sono quelle marcate con un numero k (intero positivo) tale che $2011+k$ divide $2011 + k^2$. James determina velocemente tutti tali k.
Rispondere con la somma di tutte le loro cifre.

9. Il lanciarazzi mal funzionante (Francesco Morandin)

Per attivare il lanciarazzi dell'auto di 007, si deve premere il pulsante di rilascio due volte (la prima volta per togliere la sicura). James sta cercando di attivare il lanciarazzi, ma il pulsante è danneggiato: non solo il pulsante funziona con probabilità $\frac{3}{4}$, ma è anche necessario che il pulsante funzioni due volte di seguito per riuscire ad attivare l'arma perché la sicura è danneggiata e, se si preme il pulsante e quello non funziona, la sicura si riattiva.
Qual è la probabilità che l'arma si attivi esattamente alla quinta pressione del pulsante?
Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

10. L'inseguimento (Marco Caselli)

E' notte. Emilio Largo e i suoi scagnozzi stanno inseguendo 007 con una jeep che monta un proiettore a 3 metri dal terreno per illuminare i dintorni. James si nasconde dietro a una strana lastra verticale alta 2 m. Il proiettore della jeep illumina la lastra formando a terra un'ombra quadrata. James, con molta freddezza, valuta l'area dell'ombra in $64\,\mathrm{m}^2$ e determina la distanza della jeep dalla lastra. Si rende conto che è anche in grado di calcolare l'area della lastra. Quanto misura l'area della lastra in dm^2?

11. La roulette a 36 numeri (Francesco Morandin)

Emilio Largo ha catturato James Bond e, con gusto sadico, lo sfida ad una strana roulette. Ci sono trentasei scatole numerate da 1 a 36 e trentasei palline numerate da 1 a 36, Largo introduce a caso in ciascuna scatola una pallina. Bond dovrà aprire una scatola, guardare il numero della pallina, aprire la scatola con quel numero, e continuare. Smette quando trova una pallina con il numero di una scatola già aperta. Se apre meno di tredici scatole, verrà gettato nella vasca degli squali. James calcola rapidamente la probabilità che ha di scampare, fa un ghigno beffardo e apre la scatola numero 5. Qual è la probabilità che ha calcolato?
Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

12. I calzini di James Bond (Lorenzo Bergallo)

Miss Moneypenny ha conservato in un cassetto i calzini che James Bond le lasciava per ricordo prima di partire: gli spiega che ci sono 2 calzini di un colore, 4 calzini di un altro colore, 6 calzini di un terzo, e così via; insomma, per un'appropriata numerazione dei colori dei calzini da 1 a n, ci sono $2i$ calzini dell'i-esimo colore. James ha calcolato che, prendendo a caso 79 calzini, è certo di avere 4 calzini di colori diversi, ma, prendendone 78 a caso, potrebbe non riuscirci.
Qual è il minimo numero di estrazioni casuali necessarie per essere certo di avere 6 calzini dello stesso colore?

13. Il laser da sabotare (Mihaela Badescu)

Mentre sorseggiava un vodka martini, shakerato, non mescolato, James Bond aveva notato la scrittura della formula del rapporto conico del laser

$$r = \sqrt[3]{8 - \sqrt{37}} + \sqrt[3]{8 + \sqrt{37}}$$

lasciata imprudentemente vicino alle olive. In seguito, aveva scoperto che il rapporto di potenza del laser deve essere $r^3 - 9r + 2011$. Ora, per poter sabotare efficacemente il laser, deve calcolare esattamente il valore del rapporto di potenza. Che numero calcola James?

14. Il campo della SPECTRE (Mario De Simoni)

La SPECTRE ha costruito un recinto triangolare per delimitare un campo. All'interno del campo c'è una piscina triangolare con lati di 70 m, 90 m e 110 m. Tre vialetti rettilinei collegano i vertici del recinto con quelli della piscina: ogni vialetto prolunga un lato diverso della piscina. James Bond sta facendo un sopralluogo e decide che quel campo non può essere usato come base missilistica. Sapendo che ogni vialetto è lungo quanto il lato della piscina che prolunga, determinare il rapporto tra l'area del terreno occupato dalla piscina e il restante. Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

15. Il codice di ingresso (Giuseppe Rosolini)

James ha scoperto che il codice di ingresso alla base è un numero di quattro cifre, divisibile per 7 e tale che il numero ottenuto scrivendo le cifre alla rovescia è maggiore del numero originale, ma pure divisibile per 7. In più entrambi i numeri hanno lo stesso resto nella divisione con 37; infine il codice è il più grande con queste proprietà.
Qual è il codice di ingresso?

16. Il secondo grattacielo (Giuseppe Rosolini)

Nella stessa zona del grattacielo cilindrico c'è un altro grattacielo composto da un prisma e una piramide. Il prisma ha come base un pentagono regolare: il perimetro di base è 600 m, le pareti laterali sono alte 240 m. La piramide, che funge da tetto, ha la stessa base del prisma e ogni spiovente è un triangolo equilatero. Sempre grazie a ventose che gli permettono di muoversi in qualunque direzione sulla superficie liscia del palazzo, 007 sta scalando il grattacielo per posizionare una bomba su ognuno degli spigoli, esattamente 30 m sotto la grondaia alla base del tetto. James ha posizionato la terza, ma si rende conto di aver sbagliato: ha già fissato una bomba in ciascuno dei due spigoli vicini e ora deve raggiungere uno dopo l'altro i due spigoli più lontani. Qual è la misura in metri della distanza minima che deve percorrere per terminare il lavoro e fissare tutte e cinque le bombe nei punti richiesti?

17. I ninja bassi (Giuseppe Rosolini)

Davanti ai ninja del servizio segreto giapponese, James Bond, agente del SIS (Secret Intelligence Service), non riesce a trattenere una battuta: «Siete più bassi degli agenti nel SIS». Colpito nell'orgoglio, Tiger, il capo dei ninja, gli chiede: «Che cosa intendi dire? Vuoi dire che

1. Ogni ninja è più basso di ogni agente del SIS?
2. Ogni ninja è più basso di qualche agente del SIS?
3. Si possono allineare i ninja e gli agenti del SIS su due file, una di fronte all'altra, in modo che ogni ninja abbia di fronte un agente del SIS più alto e ogni agente del SIS abbia di fronte un ninja?
4. Il più alto tra gli agenti del SIS è più alto del più alto dei ninja?
5. Il più basso agente del SIS è più alto di un numero di ninja superiore al numero di agenti del SIS più bassi del più alto ninja?
6. L'altezza media dei ninja è minore dell'altezza media degli agenti del SIS?»

James non sa che cosa dire, ma si sforza di determinare tutte le coppie di domande (a, b) con $1 \leq a \leq 6$ e $1 \leq b \leq 6$ tali che la risposta "sì" alla prima comporta la risposta "sì" alla seconda. Quante sono queste coppie?

18. La Prova Definitiva (Giuseppe Rosolini)

Per diventare capo della SPECTRE, Blofeld deve superare un test durissimo: la Prova Definitiva. La P.D. è un gioco d'azzardo dove un giocatore da solo si confronta con tutti gli altri. Ci sono dieci scatole numerate da 1 a 10 e dieci palline numerate da 1 a 10. Il giocatore da solo introduce, senza guardarle, una pallina in ciascuna scatola. Ora, ciascuno degli altri giocatori, uno dopo l'altro, apre una scatola, guarda il numero della pallina, apre la scatola con quel numero, guarda il numero della pallina in quest'ultima e continua finché trova una pallina con il numero di una scatola già aperta. Ogni giocatore vede le scatole che ha aperto chi ha giocato prima di lui. Il giocatore da solo supera la P.D. se uno degli altri apre più di cinque scatole. Sapendo che gli altri contendenti per il posto di capo della SPECTRE erano proprio cinque, qual è la probabilità che ha Blofeld di superare la P.D.?
Rispondere scrivendo le prime quattro cifre dopo la virgola del risultato.

19. I codici a colori (Giuditta Frigerio)

I codici di segnalazione del SIS utilizzano una tabella di 10 righe per 5 colonne. Un codice è determinato dalla colorazione di tutti i 50 riquadri: ogni riquadro è colorato rosso, blu, giallo o nero, facendo in modo che due riquadri dello stesso colore non abbiano lati o vertici in comune. Determinare quanti codici di segnalazione è possibile generare.

20. Il pannello di controllo (Mario De Simoni)

James Bond ha davanti un'enorme pannello di controllo con una tastiera numerata di forma quadrata con un numero dispari di tasti su ciascun lato. Su ciascun tasto è scritto un numero intero positivo. James nota subito una stranezza: i numeri sulla tastiera sono disposti a spirale. Sul tasto al centro c'è il numero 1, sul tasto a sinistra di questo c'è il numero 2, sul tasto sotto a quest'ultimo c'è il numero 3, sul tasto a destra di questo il numero 4, e così via, finché il numero più grande compare sul tasto in alto a sinistra.
Per essere certo di memorizzare la situazione, cerca un'altra proprietà per caratterizzare la situazione e si accorge che la disposizione dei numeri è tale che il valore assoluto della differenza fra le somme dei numeri sulle due diagonali è il massimo possibile inferiore a 2011.
Quanti sono i tasti?

21. Le basi della SPECTRE (Mihaela Badescu)

Appena ripescato al largo dell'isola Bunscerol, James Bond informa l'Intelligence di una pianta con le basi della SPECTRE. Traccia un triangolo di vertici SER, sul lato SE indica con P il punto medio. Poi congiunge R con P e traccia le bisettrici dei due angoli in P che non sono piatti, segnando con T e C rispettivamente i punti di incontro di una bisettrice con il segmento SR e dell'altra con il segmento RE. L'Intelligence sa che la distanza tra la base S e la base E è 240 km, la distanza tra la base R e la base S è 100 km e la distanza tra la base P e la base R è 90 km. Sanno anche che il centro operativo della SPECTRE è all'intersezione tra TC e RP. Quanti chilometri dista la base T dal centro operativo?

22. A Fort Knox (Giuseppe Rosolini)

Vedendo soldati dell'esercito americano che circondano Fort Knox, Bond intima a Goldfinger di arrendersi perché i soldati sono più forti dei suoi mercenari all'interno del fortino. Invece di agire subito, Goldfinger, come ogni cattivo che si rispetti, non perde l'occasione per declamare: «Che cosa intendi dire quando affermi che i soldati sono più forti dei mercenari? Vuoi dire che

1. Ogni soldato è più forte di ogni mercenario?
2. Il soldato più forte è più forte del mercenario più forte?
3. Ogni mercenario è meno forte di qualche soldato?
4. E' possibile far in modo che, contemporaneamente, ciascun mercenario combatta in corpo a corpo contro un soldato che è più forte?
5. Ci sono più soldati di forza superiore a qualche mercenario di quanti sono i mercenari di forza superiore a qualche soldato?»

Per far infuriare Goldfinger, Bond gli fa notare che c'è dipendenza tra le sue domande, spiegando che la domanda x dipende dalla domanda y quando una risposta positiva alla domanda y comporta una risposta positiva alla domanda x. Per esemplificare quanto sta dicendo e perdere altro tempo, dice a Goldfinger

- quante sono le domande che non dipendono da altre
- quante sono le domande che dipendono esattamente da un'altra domanda
- quante sono le domande che dipendono esattamente da due altre domande
- quante sono le domande che dipendono esattamente da tre altre domande.

Quali sono i quattro numeri che Bond dice a Goldfinger?
Si risponda scrivendoli da sinistra a destra nell'ordine in cui li ha calcolati.

23. Il simbolo della SPECTRE (Gabriele Balletti)

Il simbolo rappresentativo della SPECTRE è il triangolo ottusangolo. Sul palazzo principale dell'isola di Bunscerol, una matrice quadrata di luci presenta un'astrazione del simbolo: 81 luci sono distribuite su 9 righe e 9 colonne, la luce al centro resta sempre accesa, altre due delle rimanenti 80 luci si accendono a caso per pochi secondi, in modo che le tre luci accese formino i vertici di un triangolo ottusangolo senza essere allineate e con l'angolo ottuso sulla luce al centro. Quante sono le coppie di luci che si possono accendere?

24. La capsula (Gabriele Balletti)

James deve entrare in una capsula sferica di superficie $60\,\mathrm{m}^2$. Sa che l'apertura è costituita da un triangolo sferico con angoli di $90°, 60°, 45°$. Un triangolo sferico è la parte di superficie sferica racchiusa da tre archi di circonferenze massime. James cerca di capire se l'apertura sarà abbastanza ampia per entrare insieme con Honey. Qual è l'area del triangolo sferico misurata in dm^2?

Soluzioni per la Coppa Fermat 2011

M...................................Mihaela Badescu
Q...................................Marco Caselli
006.................................Giuditta Frigerio
008.................................Lorenzo Bergallo
009.................................Mario De Simoni
Chief of Staff......................Gabriele Balletti
Beggarman...........................Francesco Morandin
Tailor..............................Giuseppe Rosolini
The Cambridge Circus................Luigi Amedeo Bianchi
Riccardo Morandin
Giovanni Paolini
Ludovico Pernazza

Soluzione del problema 1. L'affermazione è sicuramente falsa. Il guardiano è l'unico di cui essere certi che dica il falso.
La risposta è 2010.

Soluzione del problema 2. Il percorso sulla faccia laterale è $\dfrac{150\,\mathrm{m}}{3} = 50\,\mathrm{m}$, un percorso che passa sul tetto è più lungo di $2 \cdot 30\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{m}$.
La risposta è 0050.

Soluzione del problema 3. Siano $n = \frac{MB}{MC} = 10$ e $k = \frac{BC}{DF} = 2$. Dunque

$$\frac{MC}{BC} = \frac{MC}{MB + MC} = \frac{1}{n+1}.$$

Dato che $EF = MC$ come lati opposti nel parallelogrammo $EFCM$,

$$\frac{DE}{DF} = \frac{DF - EF}{DF} = 1 - \frac{k \cdot MC}{BC} = 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Il rapporto tra le aree dei triangoli DEP e DFA è $\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2$ e quello richiesto è

$$\frac{\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2}{1 - \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)^2} = \frac{(n+1)^2 - 2k(n+1) + k^2}{2k(n+1) - k^2} = 2025$$

La risposta è 2025.

Soluzione del problema 4. Sia p il perimetro di entrambi i poligoni. Il lato del quadrato è $\frac{p}{4}$, quello del triangolo è $\frac{p}{3}$. Il raggio della circonferenza circoscritta al quadrato è $\frac{1}{2}\frac{p}{4}\sqrt{2} = \frac{p}{4\sqrt{2}}$, il raggio di quella circoscritta al triangolo è $\frac{2}{3}\frac{p}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{p}{3\sqrt{3}}$. Il rapporto richiesto è $\frac{27}{32} = 0,84375$.
La risposta è 8437.

Soluzione del problema 5. La richiesta $k^2 = \frac{n}{a-n}$ è equivalente alla richiesta $n = \frac{ak^2}{k^2+1}$. Sono i numeri k^2 positivi tali che $k^2 + 1 | a$. Per $a = 4000 = 2^5 \cdot 5^3$, i numeri k sono

k	1	2	3	7
k^2	1	4	9	49

La risposta è `0063`.

Soluzione del problema 6. Tirando i tre dadi, Bond ha già ottenuto 5. Quindi, tirandoli un'altra volta, deve ottenere 9 per vincere. Per avere 9 come somma delle facce dei tre differenti dadi, esistono 21 modi diversi. Dato che i tiri possibili sono $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$, la probabilità di vittoria di Bond è $\frac{21}{192} = 0.109375$.
La risposta è `1093`.

Soluzione del problema 7. Un polinomio del tipo $a_n x^n + \cdots + a_0 x^0$, con $a_i = 0, 1$, calcolato in 2 è uguale all'espressione decimale del numero binario avente come cifre i coefficienti del polinomio. Sia P un polinomio celebre, tale che $P(1) = 5$ e $P(-1) = 1$. Così $\frac{P(1)+P(-1)}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$ è il numero di potenze pari, $\frac{P(1)-P(-1)}{2} = \frac{5-1}{2} = 2$ il numero di quelle dispari. Considerando il numero binario associato al polinomio se l'undicesima cifra è nulla si verifica che non esistono numeri maggiori di 2011 con tali proprietà. Se l'11-esima cifra è 1 il polinomio assumerà un valore maggiore o uguale a 2048, quindi tutte le combinazioni possibili sono valide: $\binom{6}{3} = 20$ per i pari e $\binom{5}{1} = 5$ per i dispari.
La risposta è `0100`.

Soluzione del problema 8. La condizione $a + k | a + k^2$ è equivalente alla condizione $a + k | a(a+1)$ dato che $a + k^2 = (a+k)(k-a) + a(a+1)$. Dunque i numeri richiesti sono tanti quanti i divisori di $a(a+1)$ maggiori o uguali ad a. Dato che $a = 2011$ è primo e $2012 = 2^2 \cdot 503$, i valori di k sono $(a+1) - a = 1$ e $a(d-1)$ al variare di d tra i divisori di 2012 maggiori di 1: in dettaglio,

$$\begin{aligned} & 1 \\ 2011 &= 2011 \cdot (2-1) \\ 6033 &= 2011 \cdot (2^2 - 1) \\ 1009522 &= 2011 \cdot (503 - 1) \\ 2021055 &= 2011 \cdot (2 \cdot 503 - 1) \\ 4044121 &= 2011 \cdot (2^2 \cdot 503 - 1) \end{aligned}$$

La somma richiesta è

$$\begin{array}{rr} 1 = & 1\ + \\ 2+1+1 = & 4\ + \\ 6+3+3 = & 12\ + \\ 1+9+5+2+2+2 = & 21\ + \\ 2+1+5+5 = & 13\ + \\ 4+4+4+1+2+1 = & 16\ = \\ \hline & 67 \end{array}$$

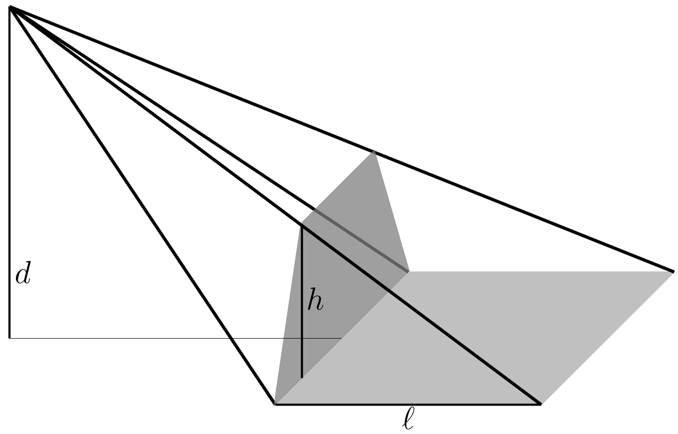
La risposta è `0067`.

Soluzione del problema 9. Sia $p = \frac{3}{4}$ la probabilità di funzionamento del pulsante. La probabilità che il lanciarazzi venga attivato esattamente alla quinta pressione richiede che il pulsante funzioni alla quarta e alla quinta (con probabilità $\mathrm{Pr}_a(p) = p^2$) come pure che non funzioni alla terza (con probabilità $\mathrm{Pr}_b(p) = 1 - p$). Inoltre una delle prime due pressioni non può essere attivante, cioè non deve avvenire che il pulsante funzioni alla prima e alla seconda pressione, che avviene con probabilità $\mathrm{Pr}_c(p) = 1 - p^2$. Perciò la probabilità $\mathrm{Pr}(p)$ che il lanciarazzi venga attivato esattamente alla quinta pressione è

$$\mathrm{Pr}(p) = \mathrm{Pr}_a(p)\mathrm{Pr}_b(p)\mathrm{Pr}_c(p) = p^2(1-p^2)(1-p)$$

cioè $\mathrm{Pr}(\frac{3}{4}) = \frac{63}{1024} = 0,0615234375$.
La risposta è `0615`.

Soluzione del problema 10. Siano d l'altezza dal suolo del faro, ℓ il lato del quadrato, h l'altezza della lastra. La situazione è rappresentata in figura



La sezione della piramide con base l'ombra quadrata e vertice il faro è un trapezio (è inessenziale decidere se isoscele o altro). La distanza orizzontale del faro da uno dei vertici più lontani del quadrato è $c = \frac{d}{h}\ell = 12\,\mathrm{m}$. La base superiore del trapezio è $b = \frac{c-\ell}{c}\ell = \ell - \frac{\ell^2}{c}$. L'area del trapezio è

$$\frac{h}{2}(b+\ell) = \frac{h}{2}\left(2\ell - \frac{\ell^2}{c}\right) = \left(16 - \frac{64}{12}\right)\,\mathrm{m}^2 = \frac{32}{3}\,\mathrm{m}^2 = 1066,\overline{6}\,\mathrm{dm}^2$$

La risposta è `1066`.

Soluzione del problema 11. James deve estrarre la prima pallina diversa dal numero della scatola, lo fa in 35 modi su 36; la seconda pallina (che deve essere un numero diverso dalla prima scatola, non può essere il numero della scatola da cui la sta estraendo) è favorevole a James in 34 casi su 35, e così via. La probabilità che apra almeno 13 scatole è

$$\frac{35}{36} \cdot \frac{34}{35} \cdot \ldots \cdot \frac{36-12}{36-11} = \frac{24}{36} = 0,\overline{6}$$

La risposta è `6666`.

Soluzione del problema 12. Per essere sicuro di avere quattro calzini di colori differenti, trattando il peggiore dei casi, bisogna estrarne $2n$ (=numero di calzini dell'n-esimo colore), poi $2n-2$, poi $2n-4$, infine estrarne un altro per avere la certezza di avere estratto almeno quattro calzini di colori differenti. Si ottiene che

$$2n + 2n - 2 + 2n - 4 + 1 = 6n - 5 = 79$$

cioè $n = \frac{79+5}{6} = 14$. Per avere 6 calzini dello stesso colore con certezza, le estrazioni necessarie sono

$$14 + 14 + 13 + 13 + 12 + 1 = 67$$

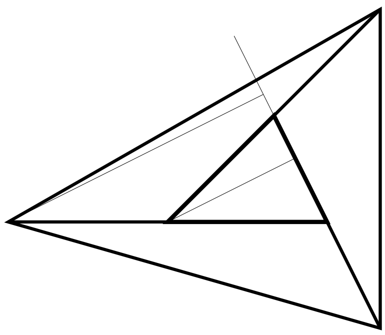
La risposta è `0067`.

Soluzione del problema 13. Si utilizza la formula $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

$$\begin{aligned} r^3 - 9r + 2011 &= 8 - \sqrt{37} + 8 + \sqrt{37} + 3(\sqrt[3]{64-37})r - 9r + 2011 \\ &= 16 + 9r - 9r + 2011 = 2027. \end{aligned}$$

La risposta è `2027`.

Soluzione del problema 14. Il recinto è diviso in quattro triangoli: la piscina e i tre triangoli con lati uno di quelli esterni, un vialetto completo e, come terzo lato, la parte di vialetto dal vertice della piscina al recinto.



Ciascuno di questi tre triangoli ha un'altezza che è doppia di un'altezza della piscina e che insiste su un lato lungo quanto quello su cui insiste l'altezza di cui è doppia. Perciò l'area di un tale triangolo è doppia dell'area della piscina. Il rapporto è perciò $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$.
La risposta è `1666`.

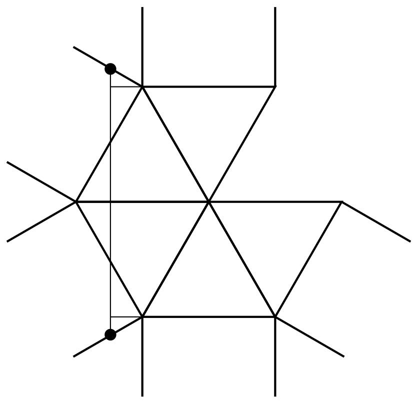
Soluzione del problema 15. Se il numero cercato è $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$, la condizione di ugual resto nella divisione per 37 si riduce a

$$\begin{aligned} (d-a) \cdot 10^3 + (c-b) \cdot 10^2 + (b-c) \cdot 10 + (a-d) \\ &\equiv (d-a) + 26(c-b) + 20(b-c) + (a-d) \\ &\equiv 16(c-b) \equiv 0 \bmod 37 \end{aligned}$$

dato $10^3 \equiv 1 \bmod 37$ e $10^2 \equiv 26 \bmod 37$. Perciò $b = c$.
Il numero cercato diventa $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + b \cdot 10 + d$ e le cifre devono essere tali che $a < d$ e $-a + 5b + d \equiv 0 \bmod 7$, cioè $b \equiv 4(d-a) \bmod 7$.
Si vede che $a \leq 2$ e, in effetti, $a = 2$, $b = 0$, $d = 9$ e $a = 2$, $b = 7$, $d = 9$ sono soluzioni.
La risposta è `2779`.

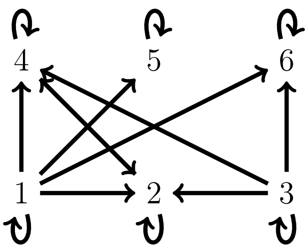
Soluzione del problema 16. Siano $\ell = 120\,\text{m}$ e $d = 30\,\text{m}$ le misure del lato di base del pentagono (e di ogni lato degli spioventi del tetto) e la distanza sullo spigolo del punto dove posizionare una bomba dal vertice dello

spigolo in comune con il tetto. Il percorso più breve richiede un trasferimento ad uno spigolo lontano $\ell\sqrt{3}$ in linea d'aria per posare la quarta bomba e un trasferimento di ℓ per posizionare la quinta bomba.
Il percorso più breve per compiere il secondo è orizzontale, mentre si deve valutare quale delle due possibilità scegliere per il primo trasferimento. Il percorso orizzontale (che attraversa due facce laterali) è 2ℓ. L'altro percorso è il più breve che attraversa il tetto. Questo problema si riduce ad uno di geometria piana appiattendo il tetto e le facce:



Il percorso più breve che passa sopra al tetto è lungo $2[\frac{\sqrt{3}}{2}\ell + \frac{d}{2}] = \sqrt{3}\ell + d$. E' più breve di quello orizzontale esattamente quando $d < \left(2 - \sqrt{3}\right)\ell$. Nel caso in considerazione $30 < \left(2 - \sqrt{3}\right) 120$ (anche con l'approssimazione data in prima pagina) e la distanza minima totale è $\sqrt{3}\ell + d + \ell \approx 357,8$.
La risposta è `0357`.

Soluzione del problema 17. Le implicazioni tra risposte positive sono



La risposta è `0015`.

Soluzione del problema 18. Si consideri la disposizione delle palline nelle scatole come una permutazione dell'insieme $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Visto il numero di contendenti superiore a 4, Blofeld vince esattamente se c'è un ciclo di lunghezza almeno 6. Si tratta di contare quante sono le biiezioni con un ciclo di lunghezza almeno 6. Dato che una biiezione può avere al massimo un ciclo di lunghezza superiore a 5, le biiezioni con un ciclo di lunghezza n con $n > 5$ sono

$$\binom{10}{n}(n-1)!(10-n)! = \frac{10!}{n}$$

Di conseguenza, la probabilità che ci sia un ciclo di lunghezza superiore a 5 è

$$\frac{1}{10!}\sum_{n=6}^{10}\frac{10!}{n} = \sum_{n=6}^{10}\frac{1}{n} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \frac{1627}{2520} = 0,645\overline{634920}$$

La risposta è `6456`.

Soluzione del problema 19. Denotiamo ciascun colore con il numero di apparizione sulla tabella a partire dall'angolo alto a sinistra spostandoci lungo le righe, una dopo l'altra. Tutti i colori compariranno almeno una volta nei primi sette riquadri. Considereremo separatamente i casi in cui sulla prima riga compiaono soltanto due colori o ne compaiono più di due.
Nel secondo caso le possibilità sono le seguenti

1	2	3	4	1
3	4	1	2	3
		⋮		

1	2	3	4	3
3	4	1	2	1
		⋮		

1	2	1	3	4
4	3	4	2	1
		⋮		

1	2	3	2	1
3	4	1	4	3
		⋮		

1	2	3	2	3
3	4	1	4	1
		⋮		

1	2	1	2	3
3	4	3	4	1
		⋮		

1	2	1	3	1
4	3	4	2	1
		⋮		

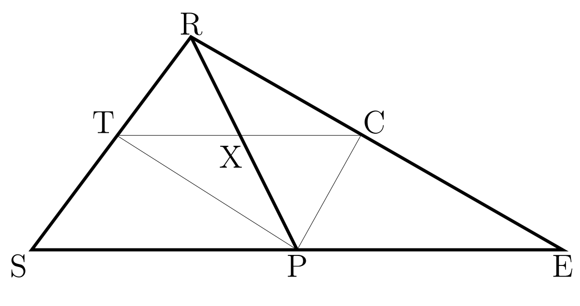
dove i puntini stanno ad indicare che la successione continua in modo univocamente determinato.
Nel primo caso le prime due righe sono necessariamente

1	2	1	2	1
3	4	3	4	3

e proseguono con due possibili disposizioni per ogni riga successiva: ad esempio, la terza può essere $\boxed{1 \mid 2 \mid 1 \mid 2 \mid 1}$ oppure $\boxed{2 \mid 1 \mid 2 \mid 1 \mid 2}$.
I codici possibili sono $4!(7 + 2^8) = 24 \cdot 263 = 6312$.
La risposta è `6312`.

Soluzione del problema 20. In una tastiera come quella del problema il numero sul tasto in alto a sinistra è il quadrato $(2\ell + 1)^2$ di un numero dispari. Non consideremo il tasto 1 in quanto segue dato che è l'unico tasto comune alle due diagonali. Il resto della tastiera è formata da ℓ perimetri quadrati di tasti, l'i-esimo perimetro quadrato con lati di $4i$ tasti. Siano $a_i > a'_i$ i due numeri sui tasti dellla diagonale principale sul perimetro dell'i-esimo quadrato, siano $b_i > b'_i$ i due numeri sui tasti dell'altra diagonale sul perimetro dello stesso quadrato. E' $b_i = a_i - 2i$ e $b'_i = a'_i - 2i$; perciò $(a_i + a'_i) - (b_i + b'_i) = 4i$. La differenza tra i numeri sui tasti di una diagonale e quelli dell'altra sulla tastiera è $\sum_{i=1}^{\ell} 4i = 2\ell(\ell + 1)$. La richiesta che questa sia massima tra quelle minori di 2011 impone che $\ell = 31$. I tasti sono $(2 \cdot 31 + 1)^2 = 63^2 = 3969$.
La risposta è `3969`.

Soluzione del problema 21. Si applica il teorema della bisettrice ai triangoli SPR e RPE.



$$\frac{\mathrm{RT}}{\mathrm{TS}} = \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{PS}} = \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{PE}} = \frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{CE}}.$$

Per il teorema di Talete, TC $\parallel$ SE e $\dfrac{\mathrm{TX}}{\mathrm{SP}} = \dfrac{\mathrm{RT}}{\mathrm{RS}}$.
Si trova $\dfrac{\mathrm{RP}}{\mathrm{PS}} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{\mathrm{RT}}{\mathrm{TS}} = \dfrac{3}{7}$; quindi $\mathrm{TX} = 120 \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{360}{7} = 51,\overline{428571}$.
La risposta è `0051`.

Soluzione del problema 22. Implicazioni tra risposte positive a domande diverse sono

$$\begin{tikzcd} & 3 \arrow[dr, leftrightarrow] & 4 \arrow[l] \arrow[d] \\ 5 & 1 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$$

La risposta è `2102`.

Soluzione del problema 23. Per determinare un triangolo ottusangolo con un vertice al centro, si fissi la seconda luce su una retta r per il vertice; la terza può trovarsi soltanto nel semipiano opposto determinato dalla retta p per il centro e perpendicolare a r. Tali luci sono $\frac{81-n}{2}$ per n il numero di luci su p (o su r, è lo stesso). Il numero di triangoli per ciascuna retta r sono $(n-1)\frac{81-2n+1}{2}$.
Le rette per il vertice in un semiquadrante sono 6: una ha 9 punti, una ne ha 5, quattro ne hanno 3.
Considerato che ogni triangolo viene contato due volte, i triangoli cercati sono $\frac{1}{2}4(1 \cdot 8 \cdot 32 + 1 \cdot 4 \cdot 36 + 4 \cdot 2 \cdot 38) = 1408$.
La risposta è `1408`.

Soluzione del problema 24. Si noti che tale triangolo sferico è ottenibile a partire da un ottavo di una sfera, ossia un triangolo sferico con tre angoli retti, semplicemente tracciando, dal centro di tale triangolo, sei archi di circonferenza massima che lo congiungano coi tre vertici e i tre punti medi dei lati. Ognuno di questi ottavi sarà formato da sei dei triangoli richiesti. L'area cercata è $\frac{6000}{48} = 125$.
La risposta è `0125`.