Soluzioni per la Coppa Fermat 2010

The Band

Martina Rovelli	*Lead Vocals*
Daniele Boccalini	*Lead Guitar*
Emilio Esposito	*Bass Guitar*
Alessandro Rosolini	*Keyboards*
Francesco Morandin	*Alto Saxophone*
Riccardo Morandin	*Trumpet*
Giuseppe Rosolini	*Drums and Percussion*
Special Thanks to	*Andrea Anfosso, Alessio Carrà*
	Alessandro Logar, Edi Rosset
	Emanuela Sasso, Ernesto De Vito

Soluzione del problema 1. Poco importa di quanto Frank si sforzi a pensare alla strategia migliore, se lui ci mette tre ore a fare il percorso, all'inizio è vicino al cane, alla fine giungono contemporaneamente, per esattamente altrettanto tempo cammina il cane, che percorre quindi 36 chilometri.
La risposta è `0360`.

Soluzione del problema 2. La chiamata dei numeri è data dalla successione definita per ricorrenza

$$\begin{aligned}&(a(0), b(0)) = (c_0, i_0)\\&(a(n+1), b(n+1)) = (a(n) + [\tfrac{2a(n)+1}{99}], (2a(n)+1)\mathrm{mod}99)\end{aligned}$$

dove c_0 è la posizione della lettera L nell'alfabeto italiano e $i_0 = 75$. La sequenza si sviluppa come segue

L75	M52	N 6	N13	N27	N55	O12	O25	
O51	P 4	P 9	P19	P39	P79	Q60	R22	...

La risposta è `0080`.

Soluzione del problema 3. Se il bugiardo fosse Alan, ho almeno due combinazioni possibili: A-B-D-C-, e A-C-B-D. Se il bugiardo fosse Duncan, ho almeno due combinazioni possibili: B-A-C-D, e B-A-D-C. Se il bugiardo fosse Bob non ho combinazioni possibili: infatti avrei che A è ultimo, e B e D, dovendo essere ad almeno due posti di distanza, si trovano uno al primo e uno al terzo posto, ma questo contraddice l'affermazione di Diana. Il bugiardo è dunque Claire, e vi è un'unica combinazione accettabile: il primo non può essere Claire, perché segue Bob,non può essere Duncan o Bob per l'affermazione di Duncan, dunque è Alan. A questo punto Duncan può essere secondo, seguito da Bob e Claire, o ultimo, preceduto da Bob e Claire. La prima non è accettabile perché contraddice l'affermazione di Alan. Dunque l'ordine di arrivo è: 3123.
La risposta è `3123`.

Soluzione del problema 4. Sia $2n$ la cifra totale da spartire. Il musicista più anziano riceve $\frac{n}{3} + \frac{n}{2}$ perché la somma delle età dei tre corrisponde a due volte

l'età del più vecchio. Da $\frac{n}{3}+\frac{n}{2}=4000$ ricavo $n=4800$, e dunque il denaro da spartire è di $2n=2\times 4800=9600$ dollari.
La risposta è 9600.

Soluzione del problema 5. La fattorizzazione di 360360 è $2^3\times 3^2\times 5\times 7\times 11\times 13$. Dunque tra gli addendi cercati compaiono certamente 11 e 13 e non ci sono il 16 e il 17. Se comparisse il 7, e non il 14, dovrei ancora sistemare $2^3\times 3^2\times 5$. Il 5 può comparire nel 10 o nel 15, ma in entrambi i casi avanza un numero inadeguato: $2^2\times 3^2=36$ oppure $2^3\times 3=24$. Allora compare il 14. Rimane ora $2^2\times 3^2\times 5$: non può esserci il 10 perché avanzerebbe $2\times 3^2=18$, quindi compare il 15. Avanza $2^2\times 3=12$. Quindi gli addendi cercati sono i numeri da 7 a 16 esculsi 11, 12, 13, 14, 15. il numero richiesto è dunque: $7+8+9+10+16+17=67$.
La risposta è 0067.

Soluzione del problema 6. Sia k il lato del lago. La figura formata dai recinti è un quadrato. L'altezza di ciascun triangolo equilatero è $\frac{\sqrt{3}}{2}k$ e la diagonale del quadrato formato dai recinti è $k(1+\sqrt{3})$. Dunque l'area del recinto totale è $k^2\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}=k^2(2+\sqrt{3})$ metri quadrati, quella del lago k^2 metri quadrati, quella dei 4 triangoli $4k^2\frac{\sqrt{3}}{4}=k^2\sqrt{3}$ metri quadrati, si ha che l'area dei terreni incolti è $k^2\mathrm{m}^2$.
La risposta è 9747.

Soluzione del problema 7. La partita si svolge nel modo seguente:

turno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
Jake	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	n	r	...
Sline	n	r	r	n	r	r	n	r	r	n	r	r	n	r	r	...

Sia $k=2010$. Ogni 6 round, dopo i primi 4, Jake guadagna un dollaro (e quindi Sline ne perde uno): quindi vince Jake, e dopo $4<n$ turni i dollari che ha si calcolano come

$$\begin{array}{ll} k+[\frac{n-4}{6}] & \text{se } n=4,5 \bmod 6 \\ k+[\frac{n-4}{6}]+1 & \text{se } n=0 \bmod 6 \\ k+[\frac{n-4}{6}]+2 & \text{se } n=1 \bmod 6 \\ k+[\frac{n-4}{6}]+3 & \text{se } n=2,3 \bmod 6 \end{array}$$

La risposta è 2345.

Soluzione del problema 8. Dato che $2310=2\times 3\times 5\times 7\times 11$, la somma dei resti coincide con il resto che si ottiene dividendo subito in 2310 piatti poiché, se $q_0=q_1p_1+r_1$ con $0\le r_1<p_1$, dalla divisione

$$q_1=q_2p_2+r_2 \quad 0\le r_2<p_2$$

si ottiene anche la divisione $q_1p_1=q_2p_1p_2+p_1r_2$ dato che $0\le p_1r_2<p_1p_2$. Il massimo resto è 2309.
La risposta è 2309.

Soluzione del problema 9. Smettono appena Jake vince $\frac{2010}{2}=1005$ dollari. Visto come si sviluppa la sequenza di vincite, si deve trovare il primo numero

n tale che la sua divisione per 6 abbia resto 5 e il quoziente per 6 di $n-4$ sia 1002, cioè $n-4 = 1002 \times 6 + 1$. Così $n = 6017$, a quel punto Jake vince 1002 dollari; la partita finisce tre turni dopo.
La risposta è `6020`.

Soluzione del problema 10. Un gioocatore può sempre attuare la strategia di togliere la differenza da 9 dell'estrazione dell'altro giocatore, in modo che dopo due estrazioni vengano tolti esattamente 9 fagioli. Il giocatore tra i due che, attuando questa strategia, fa in modo che restino nel sacchetto un numero di fagioli multiplo di 9, vince. Perciò, il solo modo che il primo ha per vincere, è quello di mettere nel sacchetto un numero di fagioli multiplo di 9. Per ogni altro numero di fagioli, il secondo giocatore si assicura la vittoria.
La risposta è `2016`.

Soluzione del problema 11. Sia n il numero dei presenti alla festa; dopo 5 ore ne sono rimasti $n(1-\frac{1}{10}) = n\frac{9}{10}$; un'ora dopo $n\frac{9}{10}(1-\frac{1}{9}) = n\frac{9}{10}\frac{8}{9} = n\frac{8}{10}$. Ad ogni ora il numero dei rimasti diminuisce di $\frac{n}{10}$, finché il numero diventa 2. Da $\frac{n}{10} = 2$ si trova $n = 20$, gli ultimi se ne vanno dopo 14 ore. Il prezzo è $8 \times 2 \times (5 \times 10 + 9 + 8 + \ldots + 1) = 8 \times 2 \times (50 + 45) = 1520$.
La risposta è `1520`.

Soluzione del problema 12. Poiché Alan e Bob hanno in comune solo Greco, e Bob porta Filosofia e Lettere, segue che Alan porta Fisica e Latino. Siccome Bob deve portare almeno una materia scientifica, Bob porta Scienze e Alan Storia. Siccome Claire porta Scienze e Fisica, Duncan porta Filosofia e Storia; inoltre gli spetta anche un libro di Geometria, perché quelli di Greco sono esauriti da Alan e Bob. Infine si sa che Duncan ha già in comune con Alan Storia, e non Geometria e Filosofia, quindi deve portare la stessa materia con la L, cioè Latino. In conclusione Duncan porta Filosofia, Storia, Geometria e Latino.
La risposta è `1358`.

Soluzione del problema 13. Per un numero primo di vertici, collegando un vertice con un altro $k < p$ vertici più avanti (cioè $k > 0$), si collegano tutti dato che $\mathrm{mcd}(k, p) = 1$. Per disegnare una stella, non posso usare $k = 1$. Inoltre per $k' = p - k$ si ottiene lo stesso poligono che si ottiene con k. Perciò le stelle diverse sono $\frac{(p-1)-2}{2} = \frac{p-3}{2}$.
La risposta è `1004`.

Soluzione del problema 14. Un numero x che si scrive come la differenza dei due quadrati $a^2 - b^2$ si scompone nei due fattori $x = (a+b)(a-b)$. Dato che ogni numero dispari $x = 2k+1$ si scrive certamente come differenza $(k+1)^2 - k^2$, per scriverlo in almeno un altro modo deve essere scomponibile in due fattori (dispari) diversi da 1 e diversi tra loro: è un numero dispari che non è primo e neppure quadrato di un numero primo. Si devono sommare tutti quelli inferiori a 100. Sono

$$\begin{array}{ccccccccccc} 15 & 21 & 27 & 33 & 35 & 39 & 45 & 51 & 55 & 57 & 63 \\ 65 & 69 & 75 & 77 & 81 & 85 & 87 & 91 & 93 & 95 & 99. \end{array}$$

La somma è 1358.
La risposta è `1358`.

Soluzione del problema 15. All'n-esimo passo si ottiene un poligono di 2^n lati. Sia k_n la lunghezza del lato all'n-esimo passo. La formula generale per k_n non serve, si deve solo trovare il primo n tale che $k_n \leq 2^{-q}$ per $q = 2010$. Partendo dal quadrato e considerando la circonferenza, vale: $2^2 = 4 < 4\sqrt{2} < k_n 2^n < 2\pi < 8 = 2^3$. Perciò, qualunque sia n, si ha che $\frac{1}{2^{n-2}} < k_n < \frac{1}{2^{n-3}}$. Allora il minimo n è $q+3$.
La risposta è `2013`.

Soluzione del problema 16. Sia n il numero totale di biglie, siano a le biglie rosse. Dopo k estrazioni successive, le raccolte di biglie possibili sono $\binom{n}{k}$, mentre le raccolte favorevoli (quelle che includono le a biglie rosse) sono $\binom{n-a}{k-a}$. Le probabilità che esca entro l'estrazione k sono $\binom{n}{k}^{-1}\binom{n-a}{k-a} = \frac{(n-a)!k!(n-k)!}{n!(k-a)!(n-a-(k-a))!} = \frac{(n-a)!k!}{n!(k-a)!}$. Per $a = 2$ la soluzione è il più piccolo k tale che $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} > \frac{1}{2}$. Risolvendo l'equazione $x(x-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ si trova che $k > \frac{1}{2} + \sqrt{n^2 + (n-1)^2}$, cioè $k > \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2010^2 + 2009^2}) \approx 1421.4$.
La risposta è `1422`.

Soluzione del problema 17. Siano $abcd$ le cifre da inserire in ordine. Dalla seconda segue che tutte le cifre richieste sono pari, e $d = 0$ per la quarta. Dalla terza, $a+b+1$, $a+b+c$ e $b+c$ sono multipli di 3, dunque a è un multiplo di 3, così come $c-1$ e $b+1$, cioè $a = 0, 6$, $b = 2, 8$ e $c = 4$. Il numero è allora uno tra 10240, 10840, 16240, 16840. Ma 1084, 1624 e 1684 non sono divisibili per 16. Dunque il numero è 10240.
La risposta è `0240`.

Soluzione del problema 18. Considerando le quattro affermazioni, e supponendo che una e una sola tra esse sia falsa, si ottiene che:

- se il bugiardo fosse A i casi possibili sono: ABDC, ACBD, ACDB, CABD, CADB;
- Se il bugiardo fosse B non ho casi possibili;
- se il bugiardo fosse C l'unico caso possibile è ABCD;
- se il bugiardo fosse D i casi possibili sono BACD, BADC, DACB, DCAB;

Escludendo che il vincitore sia bugiardo, le combinazioni che rimangono valide sono: CABD, CADB, ABCD, BACD, BADC. D è l'unico a non comparire al primo posto e A è l'unico a non comparire all'ultimo posto. B è l'unico sicuramente sincero. Non si può dire chi sia dopo B. Dunque la risposta (dopo opportune codifiche), è 4102
La risposta è `4102`.

Soluzione del problema 19. Sia n il numero dei gradoni, sia k e x_0 il lato e l'altezza del gradone in cima alla piramide. La superficie laterale di ogni gradone è 4 volte l'area del rettangolo avente come base il lato del quadrato base del gradone e come altezza l'altezza del gradone. Quindi la proporzione tra le superfici laterali è la stessa tra le aree dei rettangoli. Partendo dall'ultimo gradone, si ha che il lato di base di quello sottostante è uguale a $k+2$; l'altezza x_1 si ricava dall'uguaglianza $x_0 k = x_1(k+2)$, cioè $x_1 = x_0 \frac{k}{k+2}$. Proseguendo per ricorsione, si ha che l'altezza x_i dell'$i-1$-esimo è $x_i = x_0 \frac{k}{k+2i}$. Quindi l'altezza totale della ziqqurat è uguale alla somma delle n altezze

$$\begin{aligned} h &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &= x_0 + x_0 \tfrac{k}{k+2} + \ldots + x_0 \tfrac{k}{k+2n} \\ &= x_0 k \left(\tfrac{1}{k} + \tfrac{1}{k+2} + \ldots + \tfrac{1}{k+2n-2}\right) \end{aligned}$$

La risposta è `7381`.

Soluzione del problema 20. Nel caso che p non sia primo, devo contare i numeri $1 < k < [p/2]$ e tali che $\mathrm{mcd}(p,k) = 1$, cioè $\frac{\phi(2010)}{2} - 1 = \frac{1 \times 2 \times 4 \times 66}{2} - 1 = 263$ dato che la scomposizione di 2010 in fattori primi è $2 \times 3 \times 5 \times 67$. Si possono anche contare direttamente: indicando con A_n i multipli di n compresi tra 1 e 1005, si ha che

gli elementi di	sono	gli elementi di	sono	gli elementi di	sono
A_2	502	$A_2 \cap A_3 = A_6$	167	$A_2 \cap A_3 \cap A_5 = A_{30}$	33
A_3	335	$A_2 \cap A_5 = A_{10}$	100	$A_2 \cap A_3 \cap A_{67} = A_{402}$	2
A_5	201	$A_3 \cap A_5 = A_{15}$	67	$A_2 \cap A_5 \cap A_{67} = A_{670}$	1
A_{67}	15	$A_2 \cap A_{67} = A_{134}$	7	$A_3 \cap A_5 \cap A_{67} = A_{1005}$	1
		$A_3 \cap A_{67} = A_{201}$	5		
		$A_5 \cap A_{67} = A_{335}$	3		

e i numeri $1 \leq k \leq [p/2]$ e tali che $\mathrm{mcd}(p,k) = 1$ sono

$$A_1 \smallsetminus (A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_{67})$$

che sono $1005-(502+335+201+15)+(167+100+67+7+5+3)-(33+2+1+1) = 264$. Bisogna sottrarre 1 per escludere 1.
La risposta è `0263`.

Soluzione del problema 21. Sono le suriezioni da un insieme di $m-n$ elementi ad un insieme di n elementi (vedi esercizio successivo: $n \star (m-2n)$) che si contano con i numeri di Stirling del II tipo:

$$\sum_{k=0}^{m-n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^{m-n}.$$

Nel caso in questione, si possono anche contare le funzioni dall'insieme dei sei soldati all'insieme $\{A, B, C\}$ che non sono suriezioni: sono tutte le funzioni che hanno immagine in un insieme di due elementi. Ci sono 3 sottoinsiemi di tre elementi, per ciascuno di questi le funzioni sono 2^6. In questo modo si contano due volte le funzioni costanti. In totale le funzioni che non sono suriettive dall'insieme dei soldati all'insieme $\{A, B, C\}$ sono $3 \times 2^6 - 3$. La risposta è $3^6 - (3 \times 2^6 - 3) = 540$.
La risposta è `0540`.

Soluzione del problema 22. Il valore $a \star (b-a)$ è il numero di suriezioni da un insieme di b elementi ad un insieme di a elementi. Infatti, da un insieme di 0 elementi c'è esattamente una funzione verso un altro insieme: quest'unica è suriettiva se e solo se l'altro insieme ha pure 0 elementi. Ogni suriezione da un insieme X con $(b+1)+c$ elementi a un insieme Y con $b+1$ elementi è totalmente determinata dal suo valore in Y su un fissato argomento $\overline{x}$ di X, insieme con una funzione da $f : X \smallsetminus \{\overline{x}\} \to Y$. I casi possibili sono due: f è suriettiva su Y oppure no. Nel secondo caso le coppie che determinano completamente la suriezione data sono il prodotto del numero di sottoinsiemi di Y con b elementi e del numero di suriezioni da un insieme con $b+c$ elementi ad uno con b elementi, cioè $\binom{b+1}{b}(b \star c) = (b+1)(b \star c)$. Il primo caso si presenta soltanto se $c \neq 0$ e, se questo avviene, le coppie di questo tipo che determinano completamente la suriezione data sono il prodotto del numero di elementi di Y e del numero di suriezioni da un insieme con $b+c$ elementi ad uno con $b+1$ elementi, cioè $(b+1) \times [(b+1) \star (c-1)]$.
La risposta è `5103`.

Soluzione del problema 23. Sia n il numero totale di biglie, siano a le biglie rosse. Dopo k estrazioni successive, $p_k = 1 - \frac{\binom{n-a}{k-a}}{\binom{n}{k}} = 1 - \frac{\binom{k}{a}}{\binom{n}{a}}$ dato che $\binom{n-a}{k-a}\binom{n}{a} = \binom{n}{k}\binom{k}{a}$. La somma che definisce il tempo medio di completamento è

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = (n+1) - \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a}}{\binom{n}{a}}.$$

Dato che $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{a} = \binom{n+1}{a+1}$,

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = (n+1) - \frac{\binom{n+1}{a+1}}{\binom{n}{a}} = (n+1) - \frac{n+1}{a+1} = (n+1)\frac{a}{a+1} \approx 1759.62$$

La risposta è `1759`.

Soluzione del problema 24. Il valore $a \star (b-a)$ è il numero di suriezioni da un insieme di b elementi ad un insieme di a elementi. Perciò, per calcolare $3 \star n$ si devono contare le suriezioni da un insieme di $n+3$ elementi, diciamo A, a un insieme di 3 elementi: sono tutte le funzioni da A a quello di 3 elementi, diciamo $\{F, I, V\}$, escluse le suriezioni da A a uno di 2 elementi e le suriezioni dall'insieme $n+3$ elementi a uno di 1 elemento (in entrambi i casi, contate tre volte perché i sottoinsiemi di due elementi di $\{F, I, V\}$ sono tre così come i suoi sottoinsiemi di un elemento). Una suriezione da A a un insieme di 2 elementi, diciamo l'insieme $\{F, V\}$, è precisamente un sottoinsieme non-vuoto e non-totale di A. Perciò sono $2^{n+3} - 2$. Dunque $3 \star n = 3^{n+3} - 3 \times (2^{n+3} - 2) - 3 \times 1 = 3^{n+3} - 3 \times 2^{n+3} + 3$. Dato che 73 è primo, basta trovare il più piccolo n tale che $73 | (3^{n+2} - 2^{n+3} + 1)$. I possibili resti delle divisioni delle potenze di 3 con 73 sono 12 e si presentano in sequenza:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3^{n+2}	9	27	8	24	72	70	64	46	65	49	1	3	9

Quelli delle divisioni di 2 con 73 sono 9 e si presentano in sequenza:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^{n+3}	8	16	32	64	55	37	1	2	4	8

I resti di una potenza di 2 e di una potenza di 3 la cui differenza è 1 sono $(2,1)$ e $(4,3)$. La prima coppia che si può presentare è $(2,1)$ e avviene per $n = 10+12k = 7+9h$. Risolvendo $9h-12k = 3$ si trova $k = 2$, $h = 3$ e $n = 34$. La risposta è `0034`.