Soluzioni per la Coppa Fermat 2009

Come riportato da osservatori indipendenti, la Guida Galattica per AutoStoppisti non è molto accurata. Riteniamo comunque opportuno riportare quanto dice riguardo ai problemi che sono stati proposti. Si sa che quasi tutti sono stati verificati da Deep Thought nei brevi momenti di relax che si è concesso progettando il computer che avrebbe dovuto determinare l'esatta Domanda Definitiva sulla Vita, l'Universo e il Tutto la cui risposta si sa essere 42.

Soluzione del problema 1 (La luce sulla cima) Sia $a = 78$, $b = 856$, $c = 6$, $d = 1$, allora $2 \times [b + c - (a + d)] = 2 \times (856 + 6 - 78 - 2) = 1564$ metri.

Soluzione del problema 2 (Il quadro comandi) I punti da cui partono file di 4 pulsanti in diagonale (da NW a SE o da NE a SW) compongono due rettangoli di 5 file di 17 pulsanti. I punti da cui partono file di 4 pulsanti in orizzontale (da W a E) compongono un rettangolo di 8 file di 17 pulsanti. I punti da cui partono file di 4 pulsanti in verticale (da N a S) sono 5 file di 20 pulsanti. In totale, $2 \times (5 \times 17) + 8 \times 17 + 5 \times 20 = 406$

Soluzione del problema 3 (Alla stazione ipergalattica) La media a sportello è

$$\frac{4 + 6 + 9 + 11 + 15 + 36 + 38 + 40 + 45}{3} = 68.$$

La situazione più rapida deve essere almeno di $38 + 36 = 74$ minuti dato che uno dei tre sportelli deve gestire due dei quattro tempi superiori a 30 minuti e può essere effettivamente ottenuta così

sportello 1	sportello 2	sportello 3
45	40	36
15	11	38
6	9	
	4	

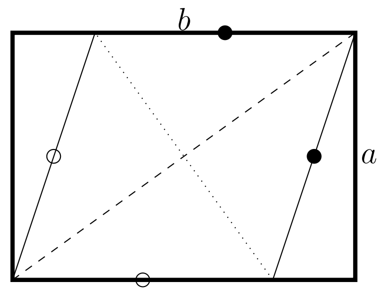
generata dal serpente 45, 40, 36, 38, 11, 15, 9, 4, 6.

Soluzione del problema 4 (Il tempo di Deep Thought) Il volume riempito dopo 2009 anni è $(1 - \frac{1}{8}) = \frac{7}{8}$ del volume totale. Ci vorranno $2009 \times \frac{8}{7} = 2296$ anni.

Soluzione del problema 5 (Il gioco di Trillian e Arthur) Bisogna trovare due coppie di numeri che abbiano lo stesso prodotto, ma la cui somma sia di diversa parità: le uniche possibili sono $(2, 6)$ e $(3, 4)$. Il numero più grande che Giovanni può dire è $12 \times 1 \times 5 \times 7 = 420$.

Soluzione del problema 6 (I tre orologi) F va come un orologio normale; C va a $80\,\mathrm{min/h}$; B va a $20\,\mathrm{min/h}$ dato che impiega 36 ore per fare un giro. B e C segneranno la stessa ora quando $11 + \frac{1}{3}r = 2 + \frac{4}{3}r$, cioè dopo $r = 9\,\mathrm{h}$. F segnerà le 4.

Soluzione del problema 7 (Un problema di estetica, I) Siano $a = 16\,\mathrm{cm}$ e $b = 25\,\mathrm{cm}$. I lati marcati con lo stesso segno sono uguali perché sono stati sovrapposti, la diagonale tratteggiata (che è la piegatura) biseca gli angoli del quadrilatero e due di questi quattro sono alterni interni. Perciò il quadrilatero ha quattro lati uguali ed è un rombo.



L'area ottenuta dopo la piegatura è uguale a quella del rettangolo se si aggiunge metà di quella del rombo.
L'altezza del rombo è il lato corto del rettangolo, il lato si ottiene dalla similitudine tra il triangolo rettangolo che è metà del rettangolo e il triangolo rettangolo che ha il lato come ipotenusa e metà diagonali come cateti:

$$\ell = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} = \frac{a^2+b^2}{2b}.$$

L'area da calcolare è $ab - \frac{a(a^2+b^2)}{4b} = \frac{6476}{25}\,\mathrm{cm}^2 = 259{,}04\,\mathrm{cm}^2$.

Soluzione del problema 8 (Le magliette degli umanoidi) La probabilità di pescarne rosse fino al quarto tentativo è

$$\frac{7}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12} = \frac{1}{39}$$

Perciò la probabilità di pescarne una azzurra è $1 - \frac{1}{39} = \frac{38}{39} = 0,\overline{974358}$.

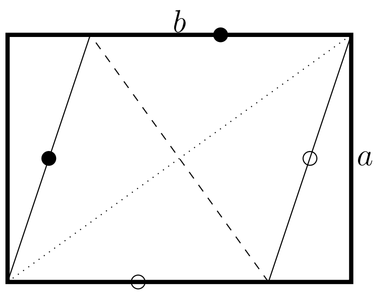
Soluzione del problema 9 (Il soprammobile di Slartibartfast) Siano $d = 120$ e $c = 137$. L'altezza è la somma di un raggio $\frac{d}{2}$, un raggio $\frac{c}{2}$ e dell'altezza della piramide a base quadrata con lato d e spigolo obliquo $\frac{c+d}{2}$. L'altezza è

$$\sqrt{\frac{c^2+2cd+d^2}{4} - \frac{d^2}{2}} = \frac{\sqrt{c^2+2cd-d^2}}{2}.$$

L'altezza totale è $\frac{c+d+\sqrt{c^2+2cd-d^2}}{2} = \frac{137+120+193}{2} = 225\,\mathrm{mm}$.

Soluzione del problema 10 (Il poligono della SCS) Fissati due vertici tra i 33 a formare una corda di base, basta fissare un altro vertice tra metà dei $31-1$ rimanenti (è necessario eliminare il vertice opposto alla corda fissata) per determinare l'altra base parallela alla prima. Con questa procedura si trova ogni trapezio due volte. I trapezi sono dunque $\binom{33}{2}\frac{15}{2} = 33\cdot 8\cdot 15 = 3960$.

Soluzione del problema 11 (Un problema di estetica, II) Siano $a = 16\,\mathrm{cm}$ e $b = 25\,\mathrm{cm}$. I lati marcati con lo stesso segno sono uguali perché sono stati sovrapposti, la diagonale tratteggiata (che è la piegatura) biseca gli angoli del quadrilatero e due di questi quattro sono alterni interni. Perciò il quadrilatero ha quattro lati uguali ed è un rombo.



L'area ottenuta dopo la piegatura è uguale a quella del rettangolo se si aggiunge metà di quella del rombo.
I calcoli sono identici a quelli dell'altro problema con la piegatura.

Soluzione del problema 12 (I litigi su Damogran) Le pratiche sono $\binom{n}{2}$. Iniziando la scomposizione in fattori primi di 438516×2 si trovano tre fattori 2, due fattori 3, un fattore 13 e $2^3\times 3^2\times 13 = 936$ e $438516\times 2 = 936\times 937$. La risposta è 937.

Soluzione del problema 13 (La beneficenza dei neo-matematici) Hanno giocato 27 volte da giovedì 20 marzo 2008 a giovedì 19 marzo 2009. Hanno guadagnato $3\times 3^{27} - 3 = 3^{28} - 3$ dollari.

Dato che $(10a+b)^2 \equiv 20ab + b^2 (\bmod 100)$ e $(10a+b)^3 \equiv 30ab^2 + b^3 (\bmod 100)$, si calcola

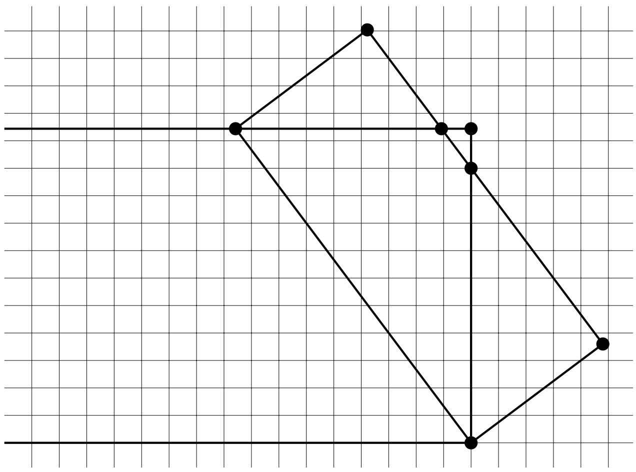
$$\begin{aligned} 3^4 &\equiv 81 (\bmod 100) \\ 3^{12} &\equiv 81^3 \equiv 41 (\bmod 100) \\ 3^{24} &\equiv 41^2 \equiv 81 (\bmod 100) \\ 3^{28} &\equiv 3^4 \cdot 3^{24} \equiv 81^2 \equiv 61 (\bmod 100) \end{aligned}$$

Soluzione del problema 14 (La sveglia su Eadrax) L'ora di pranzo è 21, oppure 22, oppure 23. L'ora in cui vanno a dormire è compresa tra 63 e 71. E' chiaro che, in uno dei due casi, l'ora deve essere l'esatto triplo della precedente; nell'altro aumenta di 1 o 2. I casi possibili sono

07	21	64		07	63	21
07	22	66		07	66	22
07	23	69		07	69	23

Dato che l'orario finale è un multiplo di 9, restano due casi (quelli in terza riga): il primo si esclude subito triplicandolo.

Soluzione del problema 15 (I templi di Magrathea, I) La situazione è la seguente (le due colonne più a sinistra sono fuori figura):



I quattro triangoli rettangoli sono simili. Le coppie contigue dei tre angoli retti insistono sugli stessi archi, generando quaterne di colonne cocircolari: non ce ne sono altri dato che il trapezio in figura non è isoscele e si può verificare che le due colonne fuori figura sono su una sola circonferenza che includa altre due colonne. I solchi da scavare sono 4. Elencando quanti solchi comprendono ciascuna colonna, iniziando da quella in alto a sinistra, ruotando in senso antiorario, si trova: 1, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 2, 1. La somma di questi numeri è 16, il prodotto è 72: il risultato è 88.

Soluzione del problema 16 (Il costo variabile di un cocktail) Non ha importanza in che modo si fanno i mucchi. In ogni caso il risultato è $\binom{50}{2} = 1225$. Infatti, per un mucchio di n dollari, il risultato è $\binom{n}{2}$: nel caso di 2 dollari, è 1. Supposto vero per tutti i mucchi con meno di k monete, si facciano due mucchi di ℓ e $k-\ell$ monete. Il loro prodotto, sommato a tutti i successivi è

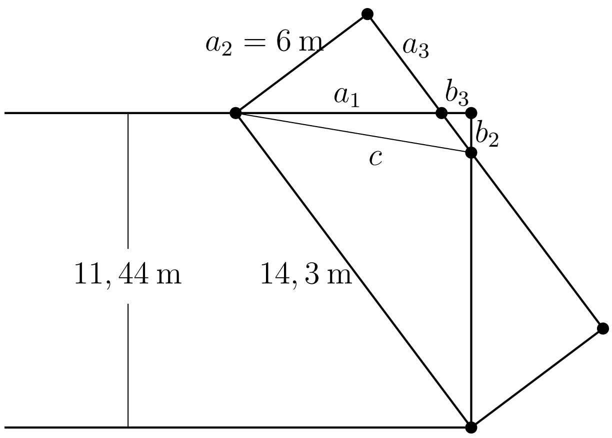
$$\begin{aligned} \ell(k-\ell) + \binom{\ell}{2} + \binom{k-\ell}{2} &= \frac{2\ell(k-\ell) + \ell(\ell-1) + (k-\ell)(k-\ell-1)}{2} \\ &= \frac{\ell(k-1) + (k-\ell)(k-1)}{2} = \frac{k(k-1)}{2} = \binom{k}{2} \end{aligned}$$

Soluzione del problema 17 (Le monorotaie di Ursa Minor Beta) Sia s lo spazio di trasmissione del segnale, siano p e q i tempi in cui due antenne sono vicine per meno di $\frac{s}{2}$ in sensi uguali e in sensi opposti, rispettivamente. Siano v_r e v_n le due velocità. Allora $\frac{s}{p} = v_r - v_n$ e $\frac{s}{q} = v_r + v_n$. Così

$$\frac{p}{q} = \frac{v_r + v_n}{v_r - v_n} = \frac{\frac{v_r}{v_n} + 1}{\frac{v_r}{v_n} - 1} = 3$$

Soluzione del problema 18 (L'Esercito della Contraddizione Apparente) Dal secondo gruppo di affermazioni, segue che ci deve essere un sincero nel reggimento nella prima fila, ma deve avere bugiardi agli estremi. Così consiste di $\frac{48}{3} + 1 = 17$ bugiardi e $49 - 17 = 32$ sinceri. Nei soldati schierati in rassegna, ogni sincero non può avere più di un bugiardo vicino. Risulta così che ogni bugiardo è circondato da sinceri. Le due file dopo la prima sono tutte di sinceri, poi c'è una fila con 17 bugiardi, poi due tutte di sinceri e così via; la penultima fila è con 17 bugiardi, l'ultima è tutta di sinceri. Dato che $2009 = 49 \times (13 \times 3 + 2)$, ci sono 14 file con bugiardi; questi sono $14 \times 17 = 238$. I sinceri sono 1771.

Soluzione del problema 19 (I templi di Magrathea, II) Considerata la figura precedente



si trova che

$$\begin{aligned}
&a_1 = \tfrac{6}{11,44} \times 14,3\,\mathrm{m} = 7,5\,\mathrm{m}\\
&a_1 + b_3 = \sqrt{14,3^2 - 11,44^2}\,\mathrm{m} = 8,58\,\mathrm{m}\\
&b_3 = 8,58\,\mathrm{m} - 7,5\,\mathrm{m} = 1,08\,\mathrm{m}\\
&a_3 = \tfrac{6}{11,44} \times (a_1 + b_3) = 4,5\,\mathrm{m}\\
&b_2 = \tfrac{b_3}{a_3} \times a_2 = 1,44\,\mathrm{m}\\
&c = \sqrt{8,58^2 + 1,44^2}\,\mathrm{m} = 8,7\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Soluzione del problema 20 (La noia di Marvin) Dati due numeri a e b, diciamo $a \geq b$, sia $a = q \cdot b + r$ con $0 \leq r < b$. Allora

$$a \boxtimes b = b \boxtimes (qb + r) = b \boxtimes ((q-1)b + r) = \ldots = b \boxtimes r.$$

Perciò $a \boxtimes b$ è il massimo comun divisore tra a e b e il numero richiesto è il più grande divisore di 2009, cioè 287.

Soluzione del problema 21 (Il gioco della doppia testa-e-croce) Il gioco termina certamente entro tre turni di coppie di lanci dato che, ad ogni coppia di turni, viene certamente eliminato almeno un giocatore. Si possono schematizzare le eliminazioni possibili ad ogni lancio come segue

lancio	1	2	3	4	5	6
risultato	I 0	I II	I 0	I II	I 0	I II

Le sequenze che danno la vittoria alla prima squadra devono contenere almeno due segni `II` e al massimo un segno `I` *prima del* secondo segno `II`. Se `II` è in seconda e quarta posizione, allora le ultime due posizioni possono contenere qualunque segno, e un *solo* segno `I` può comparire in prima o in terza posizione. Se `II` non è in seconda o in quarta posizione, allora nelle posizioni dispari *deve* comparire il segno `O`. Alla fine, su 64 sequenze possibili, quelle che denotano vittoria per la prima squadra sono $2 \times 2 \times 3 + 2 = 14$.
Perciò la probabilità di vittoria è $\frac{14}{64} = \frac{7}{32} = 0.21875$.

Soluzione del problema 22 (Lo psichiatra paranormale) Cerchiamo il massimo numero m tale che si possano prendere m numeri, nessuno triplo di un altro: si considerino i numeri tra 1 e 2009 scritti nella seguente griglia

$$\begin{array}{rrrrrrr}
1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 \\
2 & 6 & 18 & 54 & 162 & 486 & 1458 \\
4 & 12 & 36 & 108 & 324 & 972 & \\
5 & & & \dots & & 1215 & \\
\vdots & & & & & \vdots & \\
8 & 24 & 72 & 216 & 648 & 1944 & \\
10 & 30 & 90 & 270 & 810 & & \\
11 & & \dots & & 891 & & \\
\vdots & & & & \vdots & & \\
23 & 69 & 207 & 621 & 1863 & & \\
25 & 75 & 225 & 675 & & & \\
26 & & \dots & 702 & & & \\
\vdots & & & \vdots & & & \\
74 & 222 & 666 & 1998 & & & \\
76 & 228 & 684 & & & & \\
77 & \dots & 693 & & & & \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
223 & 669 & 2007 & & & & \\
224 & 672 & & & & & \\
226 & 675 & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
668 & 2004 & & & & & \\
670 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
2009 & & & & & &
\end{array}$$

Ogni numero tra 1 e 2009 compare una sola volta nella griglia, e in ciascuna riga compaiono le possibili coppie di numeri, uno il triplo dell'altro. In ciascuna delle prime 2 righe si possono prendere al massimo quattro elementi che non siano uno il triplo di un altro; in ciascuna delle successive $8 - 3 - \lfloor \frac{8-3}{3} \rfloor = 4$ righe si possono prendere al massimo tre elementi (in due modi distinti); in ciascuna delle successive $23 - 9 - \lfloor \frac{23-9}{3} \rfloor = 10$ si possono prendere al massimo tre elementi; in ciascuna delle successive $74 - 24 - \lfloor \frac{74-24}{3} \rfloor = 34$ si possono prendere al massimo due elementi (in due modi distinti); in ciascuna delle $223 - 75 - \lfloor \frac{223-75}{3} \rfloor = 99$ righe ancora successive si prendono due elementi; nel penultimo gruppo di $669 - 224 - \lfloor \frac{669-224}{3} \rfloor = 297$ righe dove si può prendere un singolo elemento (in due modi distinti) e nell'ultimo gruppo di $2009 - 669 - \lfloor \frac{2009-669}{3} \rfloor = 894$ righe dove si prende un singolo elemento. In totale, si possono prendere al massimo

$$2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 10 \cdot 3 + 34 \cdot 2 + 99 \cdot 2 + 297 + 894 = 1507$$

numeri in cui non compare nessuna coppia di un numero e del suo triplo. Il minimo numero n tale che, comunque presi n numeri tra 1 e 2009, ci sia almeno una coppia di un numero e del suo triplo è 1508.

Soluzione del problema 23 (La tavoletta di cioccolata) La strategia vincente è lasciare all'avversario una tavoletta quadrata: Aldo mangia $9002 - 2009 = 6993$ colonne.

Soluzione del problema 24 (Il campionato di MCD) Se s è il numero di squadre iscritte, allora le partite sono $\frac{1}{2}s(s-2)$ e queste sono la metà di quanti sono i numeri n, compresi tra 1 e 2008, primi con $2009 - n$. Ma questa condizione è la stessa che n sia primo con 2009. Le partite sono perciò $\frac{1}{2} \times 6 \times 7 \times 40$ e le squadre sono 42.