# Disfida Matematica 2008

**Soluzione del problema 21**

21. **Il poker ineffabile.** Innanzitutto osserviamo che, se un'entità si sposta da un posto $A$ ad un posto adiacente $B$ e l'entità in $B$ si sposta in $C$, il posto adiacente a $B$ diverso da $A$, allora quella che si trova in $C$ dovrà spostarsi nel posto successivo $D$ e così via, dunque si otterrebbe la configurazione iniziale a meno di una rotazione. Bisogna quindi contare in quanti modi le entità possono scambiarsi a coppie, ovvero determinare il numero di modi per scegliere un certo numero di coppie disgiunte (almeno una); è facile vedere che in questo caso non si ottengono delle configurazioni uguali a meno di una rotazione.
Sia $x_n$ il numero di modi per scegliere un certo numero di coppie disgiunte (almeno una) in un cerchio di $n$ entità (ovvero nel caso del problema) e $y_n$ la stessa cosa però in una striscia di $n$ entità (senza quindi che le due agli estremi siano vicine tra loro). Allora considerando un cerchio di $n+1$ entità si può prenderne una e distinguere due casi:

- Questa entità non fa parte di nessuna coppia, e allora il numero di modi per scambiare a coppie le altre entità sarà $y_n$;
- Questa entità fa parte di una coppia, e allora ci sono ancora $y_{n-1}$ modi per scambiare le entità rimanenti, con l'aggiunta di un caso perché le altre entità possono anche non scambiarsi in quanto c'è già stato uno scambio, e moltiplicato per due perché l'entità che abbiamo considerato può far parte di una coppia in due modi diversi (insieme a quella alla sua destra oppure alla sua sinistra). In totale avremo $2(y_{n-1}+1)$ casi.

Quindi abbiamo trovato che $x_{n+1} = y_n + 2(y_{n-1}+1)$.

Ora, considerando una striscia di $n+1$ entità, quella che si trova a uno dei due estremi può o non far parte di nessuna coppia, e quindi ci sono $y_n$ casi per scambiare le entità rimanenti, oppure può far parte di una coppia, e allora le entità rimanenti possono scambiarsi in $y_{n-1}$ modi, con l'aggiunta di uno poiché possono anche non scambiarsi. In totale ci sono quindi $y_n + y_{n-1} + 1$ casi.

Quindi abbiamo trovato le seguenti due relazioni:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 2(y_{n-1}+1) \\ y_{n+1} = y_n + y_{n-1} + 1 \end{cases}$$

A questo punto è sufficiente osservare che $y_2 = 1$, ovvero c'è un solo modo per scambiare almeno una coppia di entità se queste sono due, mentre $y_3 = 2$, perché se le tre entità sono in fila possono scambiarsi solo in due modi. Quindi $y_4 = y_3+y_2+1 = 4$

e così via, calcolando attraverso la relazione $y_{n+1} = y_n + y_{n-1} + 1$ tutti i valori della successione $y_i$ fino a $y_9$:

$$\begin{aligned}
y_5 &= 7 \\
y_6 &= 12 \\
y_7 &= 20 \\
y_8 &= 33 \\
y_9 &= 54
\end{aligned}$$

Ora, dato che $x_{n+1} = y_n + 2(y_{n-1} + 1)$, troviamo che $x_{10} = 122$, che è la soluzione del problema. Quindi la risposta è $\boxed{0122}$.

È inoltre possibile scrivere per $x_n$ una formula chiusa, dimostrabile anche per induzione, utilizzando la teoria delle equazioni alle differenze:

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$$

che per $n = 10$ dà proprio come risultato 122.