Disfida Matematica 2008

Soluzioni del problema 19

19. **Il passatempo di Warlock** Sia $114197726928752863294965276721 = x = y^{14}$. L'ultima cifra di y non può essere nè 3 nè 7 poiché $3^{14} \equiv 7^{14} \equiv 9 \mod 10$, inoltre non può neanche essere pari o 5 perché x non è nè pari nè multiplo di 5; quindi $y \equiv \pm 1 \mod 10$, ovvero la cifra delle unità di y è 1 oppure 9. Inoltre $y > 100$, poiché 100^{14} ha 29 cifre, mentre x ne ha 30.
Ora, se l'ultima cifra di y è 1, scriviamo $y = 10a + 1$ per qualche intero positivo $a \geq 10$. Consideriamo ora la congruenza mod 100 di $y^{14} = (10a + 1)^{14}$. Sviluppando il binomio, dato che vogliamo lavorare mod 100, quasi tutti i termini sono multipli di 100 e quindi si possono ignorare; rimane

$$140a + 1 \equiv 21 \mod 100$$

cioè $140a \equiv 20 \mod 100 \Rightarrow 2a \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow a \equiv 3 \mod 5$. Quindi il minimo $a \geq 10$ che soddisfa queste condizioni è $a = 13$, che porterebbe a $y = 131$. Il valore successivo sarebbe invece $y = 181$.

Similmente, per $y = 10a - 1$ otteniamo $-140a + 1 \equiv 21 \mod 100 \Rightarrow 3a \equiv 1 \mod 5 \Rightarrow a \equiv 2 \mod 5$. Il più piccolo a che porta a $y > 100$ è $a = 12$, con cui si ottiene $y = 119$. Il valore successivo sarebbe invece $y = 169$.

Mostriamo ora che $y = 131$ è già troppo grande con la seguente catena di disuguaglianze:

$$131^{14} > 130^{14} > 2 \cdot 10^{29} > x$$

La prima e la terza disuguaglianza sono ovvie; dimostriamo quindi la seconda: $130^{14} > 2 \cdot 10^{29}$. Semplificando i fattori in comune otteniamo $13^{14} > 2 \cdot 10^{15}$. Estraendo la radice quadrata si ottiene $13^7 > 2\sqrt{5} \cdot 10^7$. Ora, 13^7 non è proprio orribile da calcolare (o da stimare) a mano e risulta uguale a 62.748.517, mentre a destra abbiamo, dato che $\sqrt{5} < 3$, un numero minore di $6 \cdot 10^7$, che è a sua volta minore di 13^7.
Dunque $y = 119$ e la risposta è $\boxed{0119}$.