# Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul foglio delle risposte un numero intero compreso tra `0000` e `9999`.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale $x$ è il più grande intero minore od uguale ad $x$.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi `0000`.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi `9999`.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{6} = 2,4495$ $\pi = 3,1416$

20 Febbraio 2008

# Gara a Squadre - Allenamento Copernico - Testi

1. **Ritaglio di giornale** **[30 punti]**

Andrea trova un ritaglio di giornale su cui legge il testo "*...IO È 2008!*". Naturalmente si tratta di una porzione di un titolo, ma Andrea ha appena imparato a scuola che $n!$ è il *fattoriale* di $n$, ovvero il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a $n$ e quindi interpreta il ritaglio come $...10 = 2008!$. Questo non gli torna: sicuramente, pensa, 2008 fattoriale non può terminare con le cifre 10, ci sarà sicuramente qualche zero in più. Potete aiutare Andrea a calcolare con quanti zeri finisce il fattoriale di 2008?

---

2. **Il conto in banca** **[30 punti]**

All'inizio del 2008 Simplicio ha 5000 euro sul suo conto corrente. La banca gli propone di prelevarne il 20% ogni anno a marzo e di depositarne il 20% ogni anno a novembre. Quanti soldi ci sono alla fine del 2009?

---

3. **La ragnatela** **[30 punti]**

Le ragnatele sul pianeta Magratea sono tutte composte da 2008 fili che partono a raggera dal centro $O$ e un unico filo che spiraleggia in senso antiorario verso il centro a partire da un punto $A$ sul bordo della ragnatela. $A$ sta sul raggio che dal centro va esattamente verso l'alto. Il filo a spirale compie infiniti giri sempre più stretti intorno al centro. Ogni tratto della spirale (il segmento compreso tra due intersezioni successive con i raggi) si avvicina di poco verso il centro e precisamente si avvicina di un fattore

$$r = \left[\frac{1001}{1004}\right]^{\frac{1}{2008}}.$$

Sapendo che un barattolo di materiale vischioso è esattamente sufficiente per costruire il giro più esterno della spirale (di 2008 tratti), quanti barattoli servono per costruire tutta la spirale?
Si intende che il consumo è proporzionale alla lunghezza della spirale. Approssimare per eccesso ad un intero.

---

4. **Caramelle** **[30 punti]**
Al mercato ci sono tante caramelle quante le radici (contate con la propria molteplicità e contando anche le eventuali caramelle complesse-coniugate!) del seguente polinomio:

$$x^{2009} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2009}$$

e casualmente costano quanto ciascuna radice. Pierino, che è molto goloso, le compra tutte e 2008, quanto spenderà?

---

5. **Il bacio delle bolle** **[30 punti]**
Due bolle sferiche si intersecano nello spazio euclideo. La prima ha centro nell'origine $(0, 0, 0)$ e raggio $\frac{9}{2}$, la seconda ha centro nel punto $(0, 0, \frac{19}{2})$ e raggio 6. Si vuole calcolare quanti sono i punti dello spazio a coordinate intere che sono interni a entrambe le bolle.

---

6. **I giardini dell'imperatore** **[40 punti]**
I giardini dell'imperatore occupano un'area circolare di centro $O$ e raggio 60 metri. Sul perimetro esterno ci sono ingressi nei quattro punti cardinali, chiamiamo con $A$ l'ingresso a Nord e con $B$ l'ingresso a Est. In una posizione intermedia non precisata tra $A$ e $B$, sulla circonferenza esterna, c'è inoltre un ingresso secondario $P$. All'interno i giardini sono percorsi da sentieri che delimitano le varie aiuole. In particolare nella metà settentrionale troviamo i seguenti percorsi:

- un sentiero di forma perfettamente circolare, avente $OA$ come diametro;
- tre sentieri rettilinei congiungenti il centro $O$ con ciascuna delle porte $A$, $B$ e $P$. Di questi, il sentiero $OP$ interseca il sentiero circolare nel punto $Q$;
- due sentieri rettilinei che congiungono la porta $B$ ai punti $P$ e $Q$.

Si vuole determinare quant'è al massimo l'area dell'aiuola triangolare avente per vertici i punti $B$, $P$, $Q$.

---

7. **Il cane** **[40 punti]**
Un cane è legato con una corda di 30 metri a metà del lato sud di una casa quadrata di lato 12 metri. Quant'è l'area della parte di terreno che può essere raggiunta dal cane?
Nè il cane nè la corda possono entrare in casa!
Approssimare al metro quadrato più vicino.

---

8. **Il mercante di dadi** **[40 punti]**
Sotto il periodo di carnevale a Combinationlandia si presenta un uomo mascherato che si diverte ad esibirsi in facili giochi probabilistici con i Combinationlandesi. L'uomo mascherato possiede 2 dadi entrambi con 12 facce perfettamente equilibrate con incisi i numeri da 0 a 11. A un certo punto lancia i due dadi e li riprende al volo in un bicchiere in modo che lui solo possa vedere l'esito del lancio, poi si rivolge al pubblico dicendo: regalo la mia maschera a chi sa rispondere al mio indovinello: "Sapendo che su uno dei due dadi è uscito un 7 con quale probabilità la somma complessiva dei due numeri usciti è pari?" Provate a vincere la maschera.
**Nota:** si esprima il risultato riportando nelle due cifre a sinistra il numeratore e nelle due a destra il denominatore della frazione che esprime la probabilità ridotta ai minimi termini. Ad esempio: per 7/19 riportare `0719` come soluzione.

---

9. **La macchina del tempo** **[40 punti]**
Il fisico-matematico americano Davies è convinto che la costruzione di una macchina del tempo sia certa teoricamente e possibile praticamente. Per questo ha ideato una funzione chiamata *timemachine* così definita:

$$x \to y = \text{timemachine}(x) = \binom{x^2 - x - 30}{2} : \mathbb{N} \to \mathbb{N},$$

cioè è una funzione naturale di variabile naturale. Da tale funzione dipende la potenza della macchina di Davies: un macchinario enorme capace di raccogliere energia dallo spazio. Dunque più la funzione assume un valore elevato più energia Davies avrà a disposizione per costruire la macchina del tempo. Valori di energia superiori a 9999 fanno però fondere la macchina, si determini quindi il valore accettabile massimo assunto da *timemachine*.
**Nota:** Si ricorda che $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

---

10. **Che combinazione!** **[50 punti]**

Pietro, uno gnometto di Leonardopoli che è un ben noto ladro di biciclette trova una nuovissima mountain bike di marca Bellini. Purtroppo questa bici ha un lucchetto con come combinazione un intero positivo di almeno due cifre; riesce però a scoprire che le cifre della combinazione sono in ordine strettamente crescente da sinistra verso destra, quanti tentativi dovrà fare per rubare la bici?

---

11. **Il calamaro probabile** **[50 punti]**

Nell'anno 313313 a Peschilandia si è riusciti a costruire un sottomarino capace di raggiungere i profondi abissi. Capitan Primo ha così potuto avvistare un calamaro gigante a cui ha dato il nome di Probabile proprio perché riesce a catturare le sue prede con una strana probabilità: tale probabilità è infatti uguale a quella che si ha scegliendo a caso un numero intero compreso tra 486 e 499 (estremi inclusi) che tale intero sia primo. Con che probabilità un piccolo di Capodoglio riesce dunque a sfuggire ai tentacoli di Probabile? Si esprima il risultato tenendo buone le cifre intere più le restanti cifre decimali della probabilità espressa in percentuale.
Esempio: per $85,43\%$ scrivere `8543`.

---

12. **Lo scettro** **[50 punti]**

Uno scettro lungo 7 spanne è il simbolo del potere sul pianeta Magratea. Gli scettri sono perfettamente simmetrici (le due punte non si possono distinguere in alcun modo) e contengono 8 alloggiamenti distribuiti uniformemente lungo la lunghezza, uno ogni spanna. Ogni alloggiamento contiene una gemma di tre possibili colori diversi: verde, rossa o nera. È proprio la distribuzione dei colori delle gemme sugli scettri a determinare, in base a complicate regole, il grado di potere del possessore. Il numero di diversi gradi di potere è esattamente uguale al massimo numero di scettri diversi che si possono ottenere. Quanti sono?
**Nota:** Lo scettro con una gemma rossa nel primo alloggiamento e le altre verdi è indistinguibile da quello con una gemma rossa nell'ottavo (ultimo) alloggiamento e le rimanenti verdi.

---

13. **La sveglia** **[50 punti]**

Renato, un piccolo orchetto, deve alzarsi una mattina per andare a scuola (oggi ha la verifica su come catturare e cucinare gli gnomi), prima di alzarsi nota che l'ora scritta sull'orologio (orologio digitale, l'ora compare come ora*100+minuti) è esattamente la somma di tutti i numeri di due cifre che sono divisibili per entrambe le loro cifre. Sapreste dirmi a che ora si è svegliato lo sfaticato?

---

14. **La muraglia** **[60 punti]**

Si vuole costruire una muraglia che separi due stati del pianeta Magratea. La muraglia deve avere sezione quadrata di altezza 2 e larghezza 2, per costruirla si utilizzano moduli a forma di parallelepipedo $2 \times 2 \times 1$, che possono essere posizionati sia orizzontalmente che verticalmente secondo le due orientazioni possibili. È chiaro che non c'è un un unico modo per costruire la muraglia, ad esempio se fosse lunga 2 ci sarebbero 3 modi diversi: due moduli orizzontali, due moduli verticali orientati Nord-Sud, due moduli verticali orientati Est-Ovest.

In quanti modi si può costruire la muraglia se questa ha lunghezza 13?

---

15. **Funny river** **[60 punti]**

Al parco acquatico di probabilandia l'acquascivolo più gettonato è chiamato *Funny river*, è così apprezzato perché ben 5 persone possono scendere contemporaneamente. Una comitiva di 14 liceali di probabilandia decide di saltar scuola per provare l'emozionante Funny river, e pagato il biglietto si precipitano tutti insieme all'attrazione. Sapendo che naturalmente per primi potranno scendere solo 5 di loro (alla prima discesa non ci sono dunque postazioni di partenza vuote), e che i probabilandesi hanno la capacità di sdoppiarsi, dunque da ognuna delle cinque postazioni di partenza potrebbe scendere lo stesso probabilandese, determinare il numero di tutte le possibili discese iniziali.

---

16. **La ragnatela 2** **[60 punti]**
Come in un quesito precedente, una ragnatela del pianeta Magratea è composta da 2008 raggi attraversati da un unico filo che spiraleggia verso il centro a partire dal punto $A$, che sta sul raggio diretto esattamente verso l'alto.
Una mosca viene catturata una mattina nel punto $A$ e il ragno si trova sullo stesso raggio e a distanza 1004 dalla mosca (nel senso che per raggiungere la mosca dovrebbe attraversare 1003 incroci con il filo a spirale).
Si sa che:

- Ogni giorno il ragno percorre **esattamente** un tratto di ragnatela (ed uno solo), cioè si muove da un incrocio ad un altro lungo un filo di ragnatela (lungo un raggio o lungo la spirale), cercando di raggiungere l'incroco in cui si trova la mosca; di notte dorme.
- Ogni notte la mosca cerca di scappare muovendosi a caso per un tratto con l'unico vincolo di non finire nell'incrocio dove si trova il ragno, di giorno è paralizzata dal terrore.
- Il primo a muoversi è il ragno.

Per quanti giorni la mosca ha la sicurezza di non essere divorata al calar della notte?
Se ad esempio i due animali fossero a distanza 3 la mosca resterebbe sicuramente viva solo per un giorno.

---

17. **Il lago equilatero** **[70 punti]**
Il lago Argad ha la forma di un triangolo equilatero. Al suo interno c'è uno scoglio che dista dai tre vertici del lago 5, 12 e 13 km. Si determini l'area del lago in chilometri quadrati, approssimando all'intero più vicino.

---

18. **La muraglia 2** **[80 punti]**
Sul pianeta Magratea i numeri vengono scritti in base 8 anziché 10. Un ingegnere si diverte a scrivere il numero di quante possibili muraglie diverse di sezione $2 \times 2$ e lunghezza 100 si possono costruire, utilizzando moduli $2 \times 2 \times 1$ come in un quesito precedente. Risulta un numero composto da molte cifre, quali sono le ultime quattro?
**Nota:** Ovviamente nella risposta vanno usate quattro cifre comprese tra 0 e 7.

---