Disfida Matematica 2007

Soluzione del problema 21

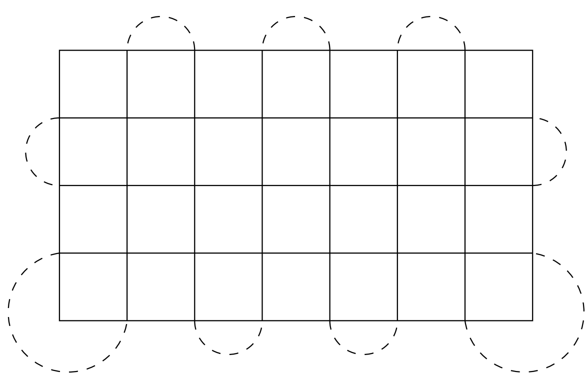
24. **La ronda.** Supponiamo di avere una griglia $a \times b$. Intanto la lunghezza complessiva delle strade è

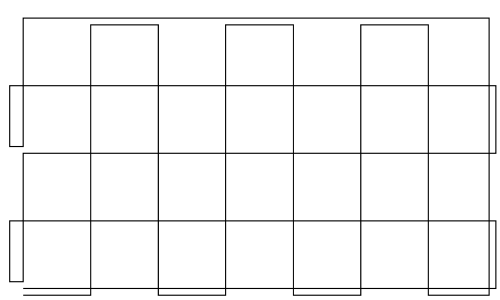
$$a(b+1) + (a+1)b = 2ab + a + b\,.$$

Supponiamo poi, come nel caso particolare dell'esercizio, che a sia dispari e b pari. Il problema del percorso minimo riguarda in particolare i nodi della griglia in cui confluiscono un numero dispari di strade (in questo caso tutti gli incroci sul perimetro tranne i quattro vertici, in cui confluiscono tre strade). Almeno una strada di questi nodi deve essere infatti percorsa più di una volta. Conviene quindi unire tra loro a coppie tali nodi con un percorso minimo. Un possibile modo di unirli è mostrato nella prima figura; da qui si evince che un tratto di strada pari ad almeno $a + b$ deve essere percorso due volte. La lunghezza totale del percorso del Primo Ministro deve essere pari ad almeno

$$2ab + a + b + a + b = 2(ab + a + b)\,.$$

Resta solo da dimostrare che questa stima è ottimale, ovvero che esiste almeno un percorso lungo $2(ab + a + b)$. Tale percorso, nel caso $a = 7$ e $b = 4$ma facilmente generalizzabile, è mostrato nella seconda figura. Risulta quindi che la risposta è $2(64 \cdot 37 + 64 + 37)$, ovvero $\boxed{4938}$. Nota: tale soluzione vale anche nel caso a, b entrambi pari, mentre nel caso a, b entrambi dispari si può trovare un percorso lungo $2(ab + a + b - 1)$.





partenza