Disfida Matematica 2007
Soluzione del problema 22

22. **La serra.** Chiamiamo ℓ il lato del quadrato di base. Conviene tagliare il solido con due piani verticali passanti per i lati della base quadrata che stanno anche sulle facce triangolari. In questo modo si ottiene un prisma a base triangolare e due tetraedri uguali. Il triangolo (tratteggiato in figura) base del prisma e dei tetraedri è un triangolo isoscele di base ℓ e lato l'altezza del trapezio. Poiché il trapezio ha i lati obliqui lunghi quanto la base minore, cioè sempre ℓ, e la base maggiore è 2ℓ, si ha che $HD = \ell/2$ e il triangolo BHD è emiequilatero, dunque $BH = \ell\sqrt{3}/2$. Quindi l'altezza relativa a BE del triangolo BHE vale, dal teorema di Pitagora,

$$\ell\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

La superficie di BHE risulta dunque $\ell^2\sqrt{2}/4$, e conseguentemente il volume del prisma centrale viene $\ell^3\sqrt{2}/4$. Il tetraedro $BHDE$ è retto con altezza $HD = \ell/2$, dunque ha volume

$$\frac{1}{3}\cdot\ell^2\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\ell}{2} = \ell^3\frac{\sqrt{2}}{24}\,.$$

Poiché i tetraedri sono due, il volume totale viene

$$\ell^3\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\cdot\ell^3\frac{\sqrt{2}}{24} = \ell^3\frac{\sqrt{2}}{3}\,.$$

Sostutendo $\ell = \sqrt{450\text{m}^2}$ risulta

$$\ell^3\frac{\sqrt{2}}{3} = 450\cdot\frac{\sqrt{900}}{3}\text{m}^3 = 4500\text{m}^3\,,$$

quindi la risposta è $\boxed{4500}$.