Disfida Matematica 2007

Soluzione del problema 18

18. **Il ribaltone.** Cominciamo osservando due cose: il numero dei parlamentari deve essere maggiore o uguale a

$$n_i = 7 + 8 + 9 + \cdots + 206 = \sum_{k=7}^{206} k\,.$$

(Nota: tale numero si può calcolare facilmente, e fa $\frac{206\cdot 207}{2} - \frac{6\cdot 7}{2} = 21300$, ma si può fare a meno).

Inoltre, dopo il ribaltone nessun gruppo parlamentare può avere più di 200 parlamentari, altrimenti ce ne sarebbero due che prima appartenevano allo stesso gruppo. Quindi il numero di parlamentari che appartengono ad uno dei nuovi gruppi (ovvero che NON sono diventati indipendenti) è al massimo

$$n_f = 7 + 8 + 9 + \cdots + 200 = \sum_{k=7}^{200} k\,.$$

(Anche qui è facile, ma inutile, calcolarlo: $\frac{200\cdot 201}{2} - \frac{6\cdot 7}{2} = 20079$.)

Quindi il numero di parlamentari che sono diventati indipendenti deve essere almeno

$$n_i - n_f = 201 + 202 + 203 + 204 + 205 + 206 = 1221\,.$$

Ora bisogna dimostrare che c'è almeno un modo di ridistribuire i parlamentari come richiesto.

Supponendo che i parlamentari siano proprio in numero di n_i, e quindi che i vecchi gruppi parlamentari coprissero tutti i numeri da 7 a 206, si può fare così: si numerano da 1 in avanti tutti i componenti di ciascun gruppo prima del ribaltone, si scartano tutti i numeri da 1 a 6 e si mettono insieme tra loro tutti i numeri 7, tutti i numeri 8 e così via, fino fino a mettere insieme tutti i numeri 200 (che sono proprio 7). Infine, si scartano tutti i numeri dal 201 in poi. In questo modo si sono scartati esattamente $6 \cdot 200 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 1221$ parlamentari, che saranno gli indipendenti, e tutti i nuovi gruppi hanno un numero diverso di persone e maggiore o uguale di 7. Quindi la risposta è $\boxed{1221}$.