

Disfida Matematica 2006
Soluzione del problema 19

19 **Il secondo laghetto.** Si tratta di un bel problema sulle terne pitagoriche. Procediamo in questo modo: cerchiamo di ottenere tutte le terne pitagoriche che hanno 35 come cateto e tra queste cerchiamo quella con somma massima e con somma minima. Chiamando c l'ipotenusa e b l'altro cateto, dobbiamo trovare le soluzioni intere positive di $35^2 + b^2 = c^2$, ovvero $35^2 = (c-b)(c+b)$. Poiché $(c-b)$ e $(c+b)$ devono essere interi positivi e 35 si fattorizza come $5^2 \cdot 7^2$, tenendo conto del fatto che $c-b < c+b$, le sole possibilità sono

$c-b$	$c+b$
1	$5^2 \cdot 7^2$
5	$5 \cdot 7^2$
7	$5^2 \cdot 7$
5^2	7^2

da cui, calcolando $b = [(c+b) - (c-b)]/2$ e $c = [(c+b) + (c-b)]/2$, si ha

b	c
612	613
120	125
84	91
12	37.

Evidentemente la terna più grande è la prima e la più piccola è l'ultima, quindi

$$35 + 612 + 613 + 35 + 12 + 37 = 1344.$$

La risposta corretta è dunque 1344.