

Disfida Matematica 2006
Soluzione del problema 17

17. **L'isola dei disonesti.** Indichiamo con N_i , $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ il numero di noci di cocco durante la notte. N_0 è il numero iniziale (richiesto dal quesito), N_1 è il numero di noci dopo la prima *sottrazione*, ..., N_5 sono le noci di cocco che al mattino vengono spartite tra i 5 disonesti.

Costruiamo una formuletta che legghi tra loro i valori successivi di N_i :

$$N_{i-1} = 1 + \frac{5}{4}N_i.$$

Iterando una volta e ponendo per brevità $\alpha = \frac{5}{4}$ si ottiene $N_3 = 1 + \alpha(1 + \alpha N_5) = 1 + \alpha + \alpha^2 N_5$ e procedendo iterativamente si ricava quindi $N_0 = 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 N_5$. Usando la nota formula per la somma delle potenze successive di un numero (che si può rapidamente dimostrare per induzione) abbiamo

$$N_0 = \frac{\alpha^5 - 1}{\alpha - 1} + \alpha^5 N_5.$$

Ora sostituiamo il valore di α e moltiplichiamo ambo i membri per 4^5 in modo da eliminare tutti i denominatori, si ha (osservando che $\frac{1}{\alpha-1} = 4$)

$$4^5 N_0 = 4 \cdot 5^5 - 4^6 + 5^5 N_5$$

da cui, ricordando che $N_5 = 5\delta$,

$$4^5(N_0 + 4) = 5^5(5\delta + 4)$$

e quindi $5\delta + 4$ deve essere multiplo di 4^5 : $5\delta = k4^5 - 4$. Chiaramente k non può essere minore di 1, d'altra parte $k = 1$ fornisce $5\delta = 4^5 - 4$ che è effettivamente un multiplo di 5; non volendo fare questa verifica a mano si può utilizzare ancora una volta il piccolo teorema di Fermat: $4^5 \equiv 4 \pmod{5}$.

Provando quindi a sostituire $k = 1$ si ottiene $5\delta + 4 = 4^5$ e quindi

$$N_0 = 5^5 - 4 = 3121.$$

La risposta è dunque 3121.