# Disfida Matematica 2006

**Soluzione del problema 15**

15. **L'equazione.** Se $p$ è un primo che divide $x$ ($x$ è una soluzione intera della equazione), si ha che $p$ divide i primi due termini dell'equazione, e quindi deve dividere 3 (il terzo termine). Gli unici valori possibili per $x$ sono dunque $-3, -1, 1, 3$, dopo aver escluso anche le potenze di 3 per la stessa ragione.

A questo punto si potrebbe gia procedere per tentativi provando a sostituire a $x$ ciascuno di questi quattro valori; in alternativa si può restringere ulteriormente il campo procedendo come segue. Riducendo l'equazione modulo 10 si ottiene

$$x^9 + 3 = 0 \mod 10 \tag{1}$$

dove il termine di grado 1 in $x$ non è presente perché il testo specifica che il coefficiente sconosciuto è multiplo di 10 e quindi congruo a 0 modulo 10. Ora è necessario sfruttare una versione del piccolo teorema di Fermat che asserisce che $x^k = 1 \bmod n$ se $k = \varphi(n)$ e $x$ è primo con $n$; $\varphi(n)$ è la funzione di Eulero, che conta il numero di interi positivi minori di $n$ che sono primi con $n$. Per numeri $n = pq$ con $p$ e $q$ primi la funzione $\varphi$ può essere esplicitata come $\varphi(pq) = (p-1)(q-1)$ e quindi $\varphi(10) = 1 \cdot 4 = 4$. Nel caso specifico $n = 10$ si può anche elencare agevolmente tutti i numeri minori di 10 e primi con 10: $\{1, 3, 7, 9\}$, che sono proprio i valori di $x$ (considerati modulo 10) che sono stati isolati in precedenza.

Il piccolo teorema di Fermat quindi implica che (lavorando sempre modulo 10): $x^9 = x(x^4)^2 = x$, da cui si ricava $x = -3 \mod 10$ o equivalentemente $x = 10k - 3$ per un qualche $k$ intero (positivo, negativo o nullo).

L'unico valore di $k$ compatibile con le possibili scelte di $x$ viste all'inizio è $k = 0$, ovvero $x = -3$. Indicando con $a$ il coefficiente incognito, la sostituzione $x = -3$ porta a

$$-3(3^8) + 3 \cdot a + 3 = 0 \tag{2}$$

e semplificando per 3 otteniamo

$$a = 3^8 - 1 = 6560$$

La risposta è dunque $\boxed{6560}$.