Disfida Matematica 2006

Soluzioni dei problemi 1 − 10

1. **Il tagliere.** Si tratta di suddividere nel modo giusto il valore in centesimi di euro corrispondente alla quantità e al tipo di pizza consumati da ciascuno. Se indichiamo con M un tagliere di "margherita", con F mezzo tagliere ai funghi e con A mezzo tagliere alle acciughe, tenendo conto che in centesimi di euro il prezzo di M è 800, quello di F 700 e quello di A 600, si ha:

$$\begin{aligned} &\text{primo amico} && \frac{3}{4}F + \frac{1}{4}M = \frac{3}{4}700 + \frac{1}{4}800 = 525 + 200 = 725 \\ &\text{secondo amico} && \frac{1}{2}A + \frac{3}{8}M = 300 + 300 = 600 \\ &\text{terzo amico} && \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}F + \frac{3}{8}M = 300 + 175 + 300 = 775\,. \end{aligned}$$

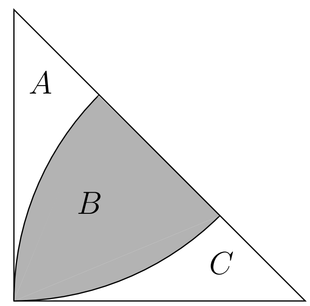
Quindi la differenza fra chi ha speso di più (terzo amico) e chi ha speso di meno (secondo amico) è $775 - 600 = 175$. La risposta è dunque $\boxed{0175}$.

2. **La gestione del campione.** Come ben sanno quelli che seguono il campionato di calcio, in un girone di 20 squadre con andata e ritorno ogni squadra gioca 38 partite (in generale, se ci sono n squadre, ognuna disputa $n-1$ partite per due volte, quindi $2n-2$ partite). Le partite in casa più i due derby sono in tutto 20, le rimanenti quindi sono 18. Poiché i km percorsi in media ogni gara sono distribuiti uniformemente, Stefano correrà per 10 km ognuna delle 20 partite, e per 5 km ognuna delle rimanenti 18 partite, per un totale di 290 km. La risposta è $\boxed{0290}$.

3. **La fiaccola.** Dividendo 2006 per 24 si ottiene 83 col resto di 14, quindi bisogna andare indietro di 83 giorni e 14 ore. Sommando i 24 giorni trascorsi di marzo ai 28 di febbraio (il 2006 non è bisestile) e ai 31 di gennaio si ottiene esattamente 83, ovvero 83 giorni fa erano le 10,30 del 31 dicembre Se andiamo indietro ancora di 14 ore arriviamo alle 20,30 del 30 dicembre. Quindi la risposta corretta è $\boxed{3012}$.

4. **Phishing.** Qui cominciano i primi trabocchetti. Si noti che le cifre 2006 che appaiono sul display non è detto che siano consecutive, perché altre cifre eventuali che potrebbero essere in mezzo a queste non appaiono proprio. Si noti inoltre che se una cifra non appare, allora non è né un 2, né un 6, né un 0. Si deve allora contare in quanti modi le due cifre mancanti si possono disporre all'interno della sequenza 2006. Questo corrisponde a trovare quanti sono i sottoinsiemi di 2 elementi che si possono formare da un insieme di 6 elementi (o se preferite le combinazioni semplici di 6 elementi presi a 2 a 2). Si ottiene $\binom{6}{2}$, ovvero 15 possibilità. Ora bisogna considerare che per ognuna di queste possibilità ci sono le cifre 1,3,4,5,7,8,9 da piazzare nei due "buchi", e dunque per ognuna delle 15 disposizioni si hanno 49 tentativi. In tutto ci potranno essere quindi $15 \cdot 49 = 735$ combinazioni. La risposta corretta è $\boxed{0735}$.

5. **The guardian.** L'area controllata dal cane è chiaramente la parte B della figura seguente:



Per calcolarne l'area, si può ad esempio considerare che $A + B$ è $1/16$ dell'area del cerchio di raggio 80 m, e dunque si ha

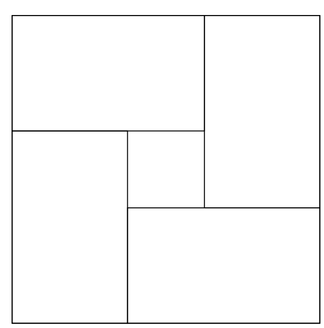
$$C = (\text{area triangolo}) - (A + B) = \frac{80^2}{2} - \frac{80^2}{8}\pi = 80^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right).$$

Poiché $A = C$, si ottiene dunque

$$B = (\text{area triangolo}) - 2C = \frac{80^2}{2} - 2 \cdot 80^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 80^2 \cdot \frac{\pi - 2}{4} = 1600(\pi - 2).$$

Usando il valore tabulato di π si ha $(\pi - 2) = 1,1416$, e dunque $1600 \cdot 1,1416 = 1826,56$. Ricordando che in generale la risposta corretta è la *parte intera* del valore ottenuto, si ha $\boxed{1826}$.

6. **L'esposizione.** Anche qui è utile tracciare una figura. Il modo di disporre 4 tappeti rettangolari uguali in una stanza quadrata lasciando scoperto un quadrato al centro è il seguente:



da cui si vede che il lato del quadrato è il semiperimetro di un tappeto, ovvero 4,5 m. In decimetri quadrati l'area della stanza risulta 45^2 dm, e la risposta è $\boxed{2025}$.

7. **Doping.** Procediamo per tentativi. Se (1) fosse vera, lo sarebbe anche (4), quindi non va bene. Se fosse vera (2), allora (4) sarebbe falsa, e quindi oltre a Boccaccio anche una tra Alfieri e Carducci sarebbe dopata, rendendo vera anche la (5), e questo non va bene. Proviamo con (3): se fosse vera, lo sarebbe anche la (4), perché una sola squadra è dopata, quindi non può essere. Se invece fosse vera (4), da (2) si avrebbe che Boccaccio è pulita, quindi o tutte le squadre sono pulite, e ciò renderebbe vera (1), oppure c'è una sola squadra dopata, e cio renderebbe vera (3). Non ci siamo ancora. L'unica possibilità è che sia vera (5): in questo caso (1) e (3) sono già false, per rendere falsa (2) dobbiamo pensare che Boccaccio sia pulita e per rendere falsa (4) dobbiamo ritenere che sia Lafieri che Carducci siano dopate. Qui non c'è contraddizione, e dunque la situazione è: Boccaccio pulita, Alfieri e Carducci dopate. La risposta corretta è $\boxed{5101}$.

8. **La defenestrazione.** Come ben sa chi ha avuto a che fare con almeno un traslocao nella sua vita, il modo ottimale per far uscire intero lo specchio è quello di infilare il suo lato corto attraverso la diagonale del finestrino. Quindi la diagonale del finestrino deve essere lunga almeno 109 cm, da cui ne risulta un'altezza minima di $\sqrt{109^2 - 60^2} = \sqrt{8281} = 91$ cm. La risposta, in <u>millimetri</u>, è $\boxed{0910}$.

9. **Il piccolo Sudoku.** Sfruttiamo la simmetria del Sudoku: se abbiamo una soluzione, anche la soluzione ottenuta "trasponendo" la tabella, ovvero scambiando le righe con le colonne, è ancora soluzione. Inoltre, siccome in questo procedimento la diagonale resta ferma, anche la nuova soluzione soddisfa le condizioni iniziali imposte dal problema. Cominciamo a mettere un 3 nel posto 1-2 (prima riga, seconda colonna); allora in 2-1 ci va per forza un 4. Quindi in 3-1 ci deve essere o un 2 o un 3, ma un 3 non ci può stare perché c'è già in 3-3, quindi mettiamo per forza un 2. In questo modo resta fissato anche il 3 in 4-1. La prima colonna è fissata. Venendo alla prima riga, al posto 1-3 possiamo mettere un 2 o un 4. Se mettiamo 2, si vede che tutti gli altri elementi sono fissati, mentre se mettiamo 4 abbiamo ancora due possibilità, che dipendono dal metter 1 oppure 4 nel posto 3-2. In definitiva ci sono 3 modi di completare la tabella a meno di scambiare righe e colonne, quindi ci sono 6 modi in tutto di completarla. Essi sono:

1	3	2	4
4	**2**	1	3
2	4	**3**	1
3	1	4	2

1	3	4	2
4	**2**	1	3
2	1	**3**	4
3	4	2	1

1	3	4	2
4	**2**	1	3
2	4	**3**	1
3	1	2	4

1	4	2	3
3	**2**	4	1
2	1	**3**	4
4	3	1	2

1	4	2	3
3	**2**	1	4
4	1	**3**	2
2	3	4	1

1	4	2	3
3	**2**	4	1
4	1	**3**	2
2	3	1	4

Il gruppo che appare più volte dopo 1 nella prima riga è 423, quindi la risposta è $\boxed{6423}$.

10. **Il medagliere.** Visto che l'ultima squadra ha vinto 4 ori e nessuna ne ha vinti 6 o più, tutte le squadre ne hanno vinti 4 o 5. Poiché gli ori in tutto sono 30, l'unico modo per ripartirli è avere 2 gruppi da 5 e 5 gruppi da 4 medaglie. Quindi in tutto 7 squadre hanno vinto almeno una medaglia. Ora cerchiamo di ordinare le squadre che hanno vinto 4 ori: poiché l'ultima tra queste ha vinto 6 argenti, tutte le altre 4 ne hanno vinti un numero maggiore o uguale a 6. Siccome però gli argenti in tutto sono 30, ne segue che tutte hanno vinto esattamente 6 argenti. Quindi l'ordine di classifica per queste dipende dai bronzi conquistati. Ricordando che non ci sono squadre a parimerito e che l'ultma squadra ne ha vinti 4, la penultima ne ha vinti almeno 5, la terzultima almeno 6 eccetera. Poiché i bronzi in tutto sono 31 ma almeno 1 ne serve per poi decidere la prima classificata tra le due che hanno preso 5 ori (visto che gli argenti sono già esauriti), l'unico modo per ripartire i 30 rimanenti in modo crescente è 4,5,6,7,8.

    La classifica finale, in ordine decrescente, è dunque:

ori	argenti	bronzi
4	6	4
4	6	5
4	6	6
4	6	7
4	6	8
5	0	0
5	0	1

    da cui si ricava la risposta $\boxed{7501}$.