Brescia, gennaio 2006

Logica, probabilità e combinatoria: Soluzione del problema 8

Sia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una successione arbitraria di interi positivi. Si prenda a caso un elemento della successione e sia a il suo valore. Si prenda a caso un altro elemento, indipendentemente dal primo e sia b il suo valore. Poi un terzo, di valore c. Dimostrare che la probabilità che $a + b + c$ sia divisibile per 3 è almeno $\frac{1}{4}$.

Dimostrazione

Data la sequenza $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con $a_i \in \mathbb{N}$, scegliamo in modo casuale tre elementi di valore a, b, c. Vogliamo calcolare la probabilità che

$$a + b + c \equiv 0 \pmod 3.$$

Siano:
p la probabilità di un intero positivo di essere congruo a 0 modulo 3;
q la probabilità di un intero positivo di essere congruo a 1 modulo 3;
r la probabilità di un intero positivo di essere congruo a 2 modulo 3.
Perché sia $a + b + c \equiv 0 \pmod 3$, deve verificarsi uno dei due casi:

1. $a \equiv b \equiv c \pmod 3$ oppure
2. $a \not\equiv b \not\equiv c \not\equiv a \pmod 3$

1. La probabilità che ($a \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod 3$) è p^3,
   la probabilità che ($a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod 3$) è q^3,
   la probabilità che ($a \equiv b \equiv c \equiv 2 \pmod 3$) è r^3.
   Quindi la probabilità che ($a \equiv b \equiv c \pmod 3$) è $p^3 + q^3 + r^3$.

2. I casi favorevoli sono 6:

   - $a \equiv 0$, $b \equiv 1$, $c \equiv 2$;
   - $a \equiv 0$, $b \equiv 2$, $c \equiv 1$;
   - $a \equiv 1$, $b \equiv 0$, $c \equiv 2$;
   - $a \equiv 1$, $b \equiv 2$, $c \equiv 0$;
   - $a \equiv 2$, $b \equiv 1$, $c \equiv 0$;
   - $a \equiv 2$, $b \equiv 0$, $c \equiv 1$;

   Ognuno di essi ha probabilità $p \cdot q \cdot r$. In totale allora: $6 \cdot p \cdot q \cdot r$

Resta da vedere che $p^3 + q^3 + r^3 + 6pqr \geq \frac{1}{4}$.
Poiché $p + q + r = 1$, si ha:

$1 = (p+q+r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 6pqr + 3(p^2q + pq^2 + p^2r + pr^2 + q^2r + qr^2)$.

Quindi bisogna dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$p^2q + pq^2 + p^2r + pr^2 + q^2r + qr^2 \leq \frac{1}{4},$$

che equivale a:

$$p^2(q + r) + p(q^2 + r^2) + qr(q + r) \leq \frac{1}{4}.$$

Equivalentemente, ricordando che $p + q + r = 1$:

$$p^2(1 - p) + p(q + r)^2 + qr(q + r - 2p) \leq \frac{1}{4},$$

$$p^2(1 - p) + p(1 - p)^2 + qr(1 - 3p) \leq \frac{1}{4},$$

$$p(1 - p) + qr(1 - 3p) \leq \frac{1}{4}.$$

Se $p \geq \frac{1}{3}$, allora

$$p(1 - p) + qr(1 - 3p)$$

è massimo per $qr = 0$ e $p = \frac{1}{2}$. In questo modo si ha

$$p(1 - p) + qr(1 - 3p) = \frac{1}{4}, \text{con}$$

$p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e $r = 0$, oppure

$p = \frac{1}{2}$, $q = 0$ e $r = \frac{1}{2}$.

Per simmetria, non si perde di generalità se si suppone $p \geq q \geq r$, per cui dev'essere $p \geq \frac{1}{3}$. Allora il valore minimo di $p^3 + q^3 + r^3 + 6pqr$ è $\frac{1}{4}$.