

# Teoria dei Numeri

Esercizi

25/26 Novembre 2005

## 1 Compensi da mediani

Ora che le gare a squadre sono gestite da un ricco ente, finalmente tutti i collaboratori riceveranno lauti compensi. L'ammontare in euro dei vari compensi saranno tutti numeri mediani di 4 cifre. In base alla definizione data dal grande capo, un numero di 4 cifre si dice mediano se le sue cifre non sono in progressione aritmetica, ma il numero costituito dalle sue due cifre centrali è la media aritmetica di quello costituito dalle due cifre iniziali e di quello costituito dalle due cifre finali. Così per esempio 3581 è un numero mediano (infatti  $(35 + 81)/2 = 58$ ), mentre 3333, 3579 o 6420 non lo sono, in quanto le loro cifre sono in progressione aritmetica.

Il compenso più alto spetta ovviamente al grande capo, un po' meno prendono i tecnici delle radio-boe (tutti compensati con la stessa cifra); meno ancora prendono i due impiegati che devono timbrare le buste (anche loro pagati ugualmente); e ancora meno il cuoco della mensa, accusato di metterci troppo tempo per cuocere un semplice uovo.

Determinare a quanto ammonterà, al massimo, il compenso del cuoco.

## 2 Divisibilità

$a$ ,  $b$  e  $c$  sono tre numeri naturali. Sappiamo che  $a$  è divisibile per 15,  $b$  è divisibile per 12 e  $c$  è divisibile per 21. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

- (A)  $a^2 + b^2 + c^2$  è divisibile per 18.
- (B)  $a + b + c$  è divisibile per 9.
- (C)  $a + b + c$  è divisibile per 2.
- (D)  $(a + b + c)^2$  è divisibile per 9.
- (E)  $a^2 + b^2 + c^2$  è divisibile per 15.

## 3 La logica non basta

Il polinomio  $ax^2 + bx + c$  assume valori interi per ogni valore intero della variabile  $x$ . Quale delle seguenti affermazioni non può essere dedotta?

- (A)  $c$  è intero.
- (B)  $a + b + c$  è intero.
- (C)  $a, b, c$  sono interi.
- (D) Se  $a$  è intero anche  $b$  è intero.
- (E)  $2a$  è intero.

## 4 Contateli un po'

Quanti numeri interi relativi  $x$  risolvono l'equazione  $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ .

(A)1 (B)3 (C)4 (D)5 (E)Infiniti

## 5 Pedine a gogo

Su una scacchiera  $75 \times 75$  le righe e le colonne sono numerate da 1 a 75. Chiara vuole mettere una pedina in tutte e sole le casella che abbiano una coordinata pari e l'altra multipla di 3. Quante pedine disporrà in tutto sulla scacchiera?

## 6 Tra fratelli

Luigi ha 4 anni più di Silvio che, a sua volta ha 3 anni più di Carlo. Se complessivamente hanno 34 anni, quanti anni ha il più grande?

## 7 Chi è

Se  $a + 1 = b - 2 = c + 3 = d - 4$ , è possibile stabilire quale sia il più piccolo dei numeri  $a, b, c, d$ ? se sì, qual è?

## 8 In fila per due

Quante sono le coppie ordinate di numeri naturali  $(x, y)$ ,  $x > 0$  e  $y > 0$ , tali che  $5 < x + y \leq 10$ ?

## 9 Equidistribuzione

Tre rette tracciate opportunamente dividono un cerchio in 7 regioni. Si vuole ora piazzare in ogni regione un intero tra 1 e 7, in modo da usarli tutti una e una sola volta, ed in modo che per ogni retta la somma dei numeri nei due semipiani da essa delimitati sia la stessa. Determinare quali interi possono venirsi a trovare nel triangolo centrale.

## 10 Il segreto del successo

Secondo una recente statistica, tra i laureati in matematica a Parma, nessuno è diventato miliardario (neanche nel senso delle vecchie lire), ma solo 1 su 14 non ha trovato un posto di lavoro entro due mesi dalla laurea. Detto  $p$  il numero, compreso tra 0 e 100, che indica la percentuale di laureati occupati dopo due mesi, determinare la sua cifra delle decine, la sua cifra delle unità, la sua 2002-esima cifra dopo la virgola, la miliardesima cifra dopo la virgola.

## 11 Contabili distratti

Nei libri contabili del comune è riportata l'addizione mostrata qui sotto. L'addizione è errata, perché un contabile distratto ha sostituito tutte le occorrenze di una cifra  $c$  con una cifra differente  $d$  (eventualmente già presente). Quanto vale  $c + d$ ?

$$\begin{array}{r} 7 \ 4 \ 2 \ 5 \ 8 \ 2 \ + \\ 8 \ 2 \ 9 \ 4 \ 3 \ 0 \ = \\ \hline 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 2 \end{array}$$

## 12 Telefonate matematiche

Determinare il prefisso telefonico della città di Matelandia, sapendo che è il massimo numero naturale di 4 cifre (in scrittura decimale) aventi le seguenti proprietà:

1. La somma di tale numero e del suo palindromo è 7216;
2. La somma delle cifre di tale numero è 17;
3. Le cifre agli estremi differiscono al più di 4.

## 13 Coppie in gioco

Trovare tutte le coppie  $(p, q)$  di numeri primi tali che  $p$  divida  $5^q + 1$  e  $q$  divida  $5^p + 1$ .

## 14 Il crollo in borsa

L'università di Parma è stata quotata in borsa. In un venerdì nero, le sue azioni hanno aperto (alle 9:00) ad un prezzo fantascientifico: un'azione valeva infatti un numero di euro pari al fattoriale di 2002. Purtroppo il prezzo si è andato deteriorando ad un ritmo vertiginoso: infatti, in ogni minuto, il prezzo diventava un numero di euro pari alla somma delle cifre del prezzo del minuto precedente. Determinare il prezzo di un'azione in chiusura della giornata, cioè alle 18:00.