Brescia, 26 novembre 2005

Allenamenti di matematica: problemi

1. Siano a_1, a_2, a_3, a_4 quattro numeri interi distinti e sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che

$$P(a_1) = P(a_2) = P(a_3) = P(a_4) = 1. \tag{1}$$

   (i) Dimostrare che non esiste nessun numero intero n tale che $P(n) = 12$.

   (ii) Esistono un polinomio $P(x)$ che soddisfa la condizione 1 ed un intero n tale che $P(n) = 1998$?

2. Per quali valori di λ l'equazione $||x| - 1| = \lambda$ ha esattamente tre soluzioni?

   (A) Per ogni $\lambda > 0$

   (B) solo per $\lambda = 0$

   (C) per ogni λ tale che $0 \leq \lambda \leq 1$

   (D) solo per $\lambda = 1$

   (E) per nessun valore di λ.

3. Il polinomio ax^2+bx+c assume valori interi per ogni valore intero della variabile x. Quale delle seguenti affermazioni non può essere dedotta?

   (A) c è intero

   (B) $a + b + c$ è intero

   (C) a, b, c sono interi

   (D) se a è intero, anche b è intero

   (E) $2a$ è intero.

4. Dire quante soluzioni reali ha l'equazione $2^{x^2-3x+\sqrt{5}} = 1$.

   (A) Nessuna

   (B) 1

   (C) 2

   (D) 4

   (E) infinite.

5. Si determinino i valori del parametro k per cui l'equazione $x^3-x+k = 0$ ha tre radici intere.

6. In una elezione con 25 votanti tre candidati si spartiscono i voti (tutti validi) in modo che nessun candidato ottenga la maggioranza assoluta. Quanti sono gli esiti possibili della votazione?

7. a, b, c sono tre numeri reali positivi tali che $a + b + c = 1$. Quale delle seguenti condizioni è equivalente a imporre che a, b, c siano le misure dei lati di un triangolo non degenere?

   (A) $0 < |b - a| < \frac{1}{2},\ 0 < |c - b| < \frac{1}{2},\ 0 < |c - a| < \frac{1}{2}$
   (B) $a < \frac{1}{2},\ b < \frac{1}{2},\ c < 12$
   (C) $a + b < \frac{1}{2},\ b + c < \frac{1}{2},\ c + a < \frac{1}{2}$
   (D) $a \geq \frac{1}{3},\ b \geq \frac{1}{3},\ c \geq \frac{1}{3}$
   (E) nessuna delle precedenti.

8. Sia f una funzione definita nell'insieme degli interi positivi a valori interi positivi. Diciamo che:

   - f è crescente se $n < m$ implica $f(n) < f(m)$
   - f è moltiplicativa se $MCD(m, n) = 1$ implica $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$
   - f è completamente moltiplicativa se $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ per ogni m, n.

   (i) Si dimostri che se f è crescente allora $f(n) \geq n$ per ogni n.
   (ii) Si dimostri che se f è crescente, completamente moltiplicativa e $f(2) = 2$ allora $f(n) = n$ per ogni n.
   (iii) L'affermazione (ii) resta vera se si elimina l'avverbio "completamente"?

9. **Numeri grandi**

   Determinare la cifra delle unità del numero

   $$2^{(2^1)} + 2^{(2^2)} + 2^{(2^3)} + 2^{(2^4)} + \ldots + 2^{(2^{1999})}$$

   (A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8.

10. **L'andamento delle iscrizioni**

    Da un'antica cronaca dell'università di Parma:

    Due anni fa il numero degli iscritti era un quadrato perfetto. L'anno scorso, il numero degli iscritti è cresciuto di 100 unità, diventando un quadrato perfetto aumentato di 1. Quest'anno è cresciuto ancora di 100 unità, diventando nuovamente un quadrato perfetto.

    Determinare il numero degli studenti iscritti nell'anno a cui risale la cronaca.

11. **Numeri monotòni**

Chiamiamo *numeri monotòni* gli interi positivi tali che:

-si scrivano usando almeno due cifre;

-nessuna cifra sia zero;

-le cifre compaiano in ordine strettamente crescente o strettamente decrescente.

(Ad esempio, 127 e 9742 sono numeri monotòni, mentre 172, 1224 e 7320 non lo sono.)

   (a) Calcolare la somma di tutti i numeri monotòni di cinque cifre.
   (b) Determinare con quanti zeri termina il minimo comune multiplo di tutti i numeri monotòni (senza vincoli sul numero di cifre).

12. **Solo soletto**

Per quali interi a, b il numero $2^{2^a-b^2}+1997$ risulta intero e primo?

13. **Secondo le regole**

Si determinino tutte le terne di interi (x, y, z) con $x, y, z \geq 2$ che verificano le condizioni:

$$\begin{cases} x \text{ divide } yz-1 \\ y \text{ divide } zx-1 \\ z \text{ divide } xy-1. \end{cases}$$

14. **Anni quadrati**

Determinare se

(a) 2005^{2004} è somma di due quadrati perfetti positivi.

(b) 2004^{2005} è somma di due quadrati perfetti positivi.

15. **Pari e dispari**

Quanti sono gli interi compresi tra 1 e 2005 inclusi che hanno un numero dispari di cifre pari?

16. **Queste stampanti!**

Il grande capo ha stabilito che il budget a disposizione dell'ente sarà un numero di euro pari a 34!, cioè il prodotto di tutti gli interi tra 1 e 34. Un socio esegue il calcolo con l'auito di un computer ed ottiene il seguente stampato

$34! = 295232799**96041408476186096435**000000$

Purtroppo, come si può vedere, la stampante ha sostituito 4 delle cifre con degli asterischi. Determinare le cifre mancanti.