

Allenamenti di matematica: algebra

1. Siano a, b, c tre numeri reali distinti e sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali. Sapendo che:
 - (a) $P(x)$ diviso per $(x - a)$ dà resto a ;
 - (b) $P(x)$ diviso per $(x - b)$ dà resto b ;
 - (c) $P(x)$ diviso per $(x - c)$ dà resto c ,

determinare il polinomio che si ottiene come resto della divisione di $P(x)$ per $(x - a)(x - b)(x - c)$.

2. Quale delle seguenti disequazioni ha come soluzione l'insieme disegnato in figura?
 - (A) $x^6 + y^6 \leq 64$
 - (B) $|2x| + |y| \leq 4$
 - (C) $|x + y| + |x - y| \leq 4$
 - (D) $|y| + |x + 1| + |x - 1| \leq 4$
 - (E) $|x| + ||2y| - |x|| \leq 4$

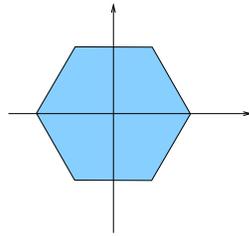


Figura 1: Esagono regolare

3. Sulla lavagna è scritto inizialmente il numero 1. Successivamente, dieci studenti a turno cancellano il numero che trovano sulla lavagna e lo sostituiscono con il suo doppio aumentato di 1. Qual è il numero che resta sulla lavagna alla fine?
 - (A) 31
 - (B) $2^{11} + 1$
 - (C) $2^{11} - 1$
 - (D) 3^{10}
 - (E) 2005.

4. Siano a_1, a_2, \dots, a_n degli interi distinti. Dimostrare che il polinomio

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$$

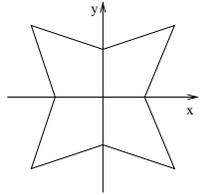
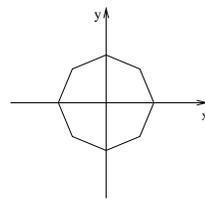
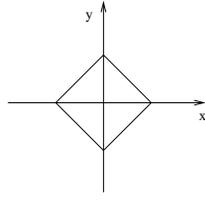
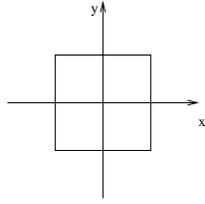
è irriducibile, cioè non è il prodotto di due polinomi a coefficienti interi di grado minore.

5. Siano a, b, c tre numeri reali tali che $a + b + c = 0$ e $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Qual è il valore di $a^4 + b^4 + c^4$?
- (A) $\frac{1}{3}$
 (B) $\frac{1}{2}$
 (C) 2
 (D) 3
 (E) le due equazioni non sono sufficienti a determinare il valore di $a^4 + b^4 + c^4$.
6. Massimo sa che camminando impiega 24 minuti per andare da casa sua alla stazione, mentre correndo ne impiega 12. Dovendo prendere un treno alle 12:30, parte da casa per tempo alle 12 (camminando). Durante il tragitto però si accorge di aver dimenticato il portafoglio. Immediatamente torna a casa di corsa, e poi corre in stazione, dove arriva puntuale alle 12:30. A che ora si è reso conto di aver dimenticato il portafoglio?
- (A) 12:06
 (B) 12:09
 (C) 12:12
 (D) 12:15
 (E) i dati sono insufficienti.
7. Determinare se il seguente enunciato è vero o falso:
 “Per ogni successione x_1, x_2, x_3, \dots di numeri reali maggiori o uguali a zero esistono due successioni a_1, a_2, a_3, \dots e b_1, b_2, b_3, \dots di numeri reali maggiori o uguali a zero tali che
- $x_n = a_n + b_n$ per ogni n ;
 - $a_1 + \dots + a_n \leq n$ per infiniti valori di n ;
 - $b_1 + \dots + b_n \leq n$ per infiniti valori di n , eventualmente diversi dai precedenti.”
8. Ad una festa l'età media è 31 anni, l'età media degli uomini è 35 anni e l'età media delle donne è 25 anni. Qual è il rapporto fra il numero degli uomini e quello delle donne?
- (A) $\frac{5}{7}$
 (B) $\frac{7}{5}$
 (C) $\frac{4}{3}$
 (D) $\frac{3}{2}$
 (E) 2.

9. D è il dominio del piano cartesiano costituito dai punti (x, y) tali che

$$|x| + |y| + |x + y| + |x - y| \leq 3.$$

La forma del dominio D è



10. Sia x un numero reale. Quale delle seguenti affermazioni non è equivalente alla disequazione:

$$|2x - 3| > 5?$$

- (A) $|6 - 4x| > 10$
 (B) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} > 25$
 (C) $|10x - 15| > 25$
 (D) $x < -1$ oppure $x > 4$
 (E) $(2x - 3)^2 > 5(2x - 3)$.
11. Per ottenere la tesi “ x è razionale” quale ipotesi assumereste?
- (A) $x + x^2$ è razionale
 (B) x^7 e x^{14} sono razionali
 (C) $x + \pi$ e $x - \pi$ sono irrazionali
 (D) $x\sqrt{2}$ e $\frac{x}{\sqrt{2}}$ sono irrazionali
 (E) x^{12} e x^7 sono razionali.
12. Dire quale dei seguenti sistemi di disequazioni equivale a

$$\begin{cases} |x| < 1 \\ |y| < 1 \end{cases}$$

- (A) $\begin{cases} |x + y| < 2 \\ |x - y| < 2 \end{cases}$
 (B) $|x + y| + |x - y| < 2$
 (C) $\begin{cases} |x| + |y| < 2 \\ |xy| < 1 \end{cases}$

$$(D) \begin{cases} x^2 + y^2 < 2 \\ |x^2 - y^2| < 1 \end{cases}$$

$$(E) |x| + |y| > x^2 + y^2$$

13. In quanti modi si possono sistemare i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 su una scacchiera 3x3 in modo tale che la somma dei numeri su ogni riga, su ogni colonna e sulle diagonali sia sempre uguale a 15?
14. Edoardo è andato in vacanza nella città di Altanbulat. Il suo aereo, all'andata, è partito da Milano alle 13:00 ed è arrivato ad Altanbulat alle 9:00 del giorno dopo (ora locale). Il volo di ritorno invece è partito da Altanbulat alle 9:00 ed è atterrato alle 15:00 dello stesso giorno a Milano (di nuovo, tutte le ore indicate sono secondo il fuso orario locale). Supponendo che i due viaggi abbiano avuto la stessa durata reale, quant'è la differenza di fuso orario tra l'Italia e Altanbulat?
- (A) Meno di tre ore
 (B) più di tre ore, ma meno di sei
 (C) più di sei ore, ma meno di nove
 (D) più di nove ore
 (E) non è possibile determinarla.
15. Quanti sono i polinomi $p(x)$ di secondo grado, a coefficienti interi e con due radici intere, tali che $p(8) = 1$? (Nota: ricordiamo che i numeri interi possono essere positivi, negativi o nulli)
- (A) 1
 (B) 2
 (C) 3
 (D) un numero finito maggiore di 3
 (E) infiniti.
16. Al variare del parametro reale a , qual è il numero massimo di soluzioni per l'equazione $||x - 1| - 4| + x = a$?
- (A) 1
 (B) 2
 (C) 3
 (D) 4
 (E) può averne infinite.
17. Uno storico della città si è accorto che il deficit del bilancio segue alcune regole curiose. Infatti, se chiamiamo $f(n)$ il deficit dell'anno n dalla fondazione della città, allora $f(1) = 1$ e, per tutti i numeri naturali n , $f(2n) = 2f(n) + 1$. Quanto è stato il deficit nell'anno 1024-esimo dalla fondazione della città?