Esercizi di Teoria dei numeri

11 novembre 2014 - Iseo

1. Quanti quadrati perfetti dividono 1600 ? [Un quadrato perfetto è un numero del tipo n^2, con n numero naturale.]
   SOLUZIONE: 8
   $1600 = 2^6 \cdot 5^2$. Quindi i quadrati perfetti cercati sono : $1, 2^2, 2^4, 2^6, 5^2, 2^2 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 5^2, 2^6 \cdot 5^2$.

2. Quanti sono i numeri naturali n tali che n sia primo e anche $n^3 + 3$ sia primo?
   SOLUZIONE: 1.
   Se $n = 2$, $n^3 + 3 = 11$ che è primo, quindi $n = 2$ è soluzione del problema. Se n è primo e disari allora $n^3 + 3$ è pari e primo, ma questo fatto è impossibile.

3. Sulla lavagna sono scritti alcuni numeri interi positivi, non necessariamente distinti. Se li sommo trovo 83, se li moltiplico trovo 1024. Qual è il più piccolo dei numeri scritti sulla lavagna?
   SOLUZIONE: 1.
   Osserviamo che $1024 = 2^{10}$, quindi i numeri scritti sono potenze di due. Poichè la somma di questi è dispari ci deve per forza essere l'1.

4. Qual è la cifra delle unità del numero $\frac{66^{66}}{2}$?
   SOLUZIONE: 8.
   $\frac{66^{66}}{2} = \frac{2^{66} \cdot 3^{66} \cdot 11^{66}}{2} = 2^{65} \cdot 3^{66} \cdot 11^{66}$.Ora usiamo il fatto che la periodicità della cifra delle unità delle potenze di 2 vale 4, quella delle potenze di 3 vale 4 e quella delle potenze di 11 vale 1. Quindi 2^{65} terminerà con 2, 3^{66} con 9 e 11^{66} con 1. Quindi il numero di partenza terminerà con 8.

5. Per quanti numeri naturali n, sia n che $(n - 6)^2 + 1$ sono primi?
   SOLUZIONE: 3.
   Se n è pari, ossia se $n = 2$, allora $(n - 6)^2 + 1 = 17$ che è primo e quindi $n = 2$ è soluzione del problema. Se n è dispari allora $(n - 6)^2 + 1$ è pari e quindi può valere soltanto 2. Quindi $n - 6 = \pm 1$, da cui $n = 7$ oppure $n = 5$.

6. Luca scrive sulla lavagna tutti i numeri pari consecutivi da 2 a 2010 (compresi). Poi Giovanni cancella tutti i numeri che sono multipli di 3. Quanti numeri rimangono?
   SOLUZIONE: 670.
   Il problema è equivalente a scrivere tutti i numeri da 1 a 2010 e di questi cancellare i dispari e i multipli di 3. Quindi inizialmente ho 2010 numeri. I numeri dispari tra questi sono 1005 numeri e i multipli di 3 sono $2010 : 3 = 670$. Così però ho contato

due volte i numeri dispari multipli di 3, che sono in tutto $2010 : 6 = 335$. Quindi alla fine mi rimangono $2010 - 1005 - 670 + 335 = 670$.

7. Quanto vale la somma : $1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + \ldots + 35 + 35 + 36$?
SOLUZIONE : 1295.
Aggiungiamo un 1 e un 36 così la somma della nuova sequenza vale $2\frac{36 \cdot 37}{2} - 1 - 36 = 1295$.

8. Per quanti valori distinti del numero naturale n l'equazione $3x^2 + 2nx + 3 = 0$ ha due soluzioni reali distinte e queste sono entrambe numeri interi ?
SOLUZIONE: Nessuno.
Siano a e b le soluzioni intere dell'equazione. Allora per il teorema di Ruffini $3x^2 + 2nx + 3 = k(x - a)(x - b)$ con k costante. Quindi innanzitutto si dovrà avere che 2n sia multiplo di 3 e quindi n sia multiplo di 3. Allora $n = 3q$ con q intero. Allora l'equazione diventa $x^2 + 2qx + 1 = 0$. Imponendo che $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 + 2qx + 1$ si ottiene in particolare che ab =1, da cui $a = 1$ e $b = 1$ oppure $a = -1$ e $b = -1$. In ogni caso allora le radici dell'equazione sono coincidenti.

9. Quante cifre ha il numero : $(111222333444555666777888999)/111$?
SOLUZIONE : 25.

10. Trovare tutte le coppie (x, y) tali che $13x - 19y = 6$.
SOLUZIONE : $(x = 18 - 19h, y = 12 - 13h)$.

11. Quante coppie (x, y) risolvono $17x + 5y = -2$ con $10 < x < 100$ e $-100 < y < 10$?
SOLUZIONE: 3.
Le generiche soluzioni sono $(x = 4 + 5h, y = -14 - 17h)$. Quelle richieste sono per $h = 2, 3, 4$.

12. Determinare il massimo intero positivo k tale che k^2 divide $\frac{n!}{(n-6)!}$ per ogni $n > 6$.
SOLUZIONE: 12.
Sia $N = \frac{n!}{(n-6)!} = (n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n$. Cerchiamo qual è il massimo q che divide N, per ogni n. Tra sei interi consecutivi tre sono divisibili per 2, di questi tre, uno è sicuramente divisibile per 4. Dunque 2^4 divide N. Tra sei interi consecutivi ci sono due interi divisibili per 3. Dunque 3^2 divide N. Tra sei interi consecutivi, uno solo è divisibile per 5. Dunque 5 divide N. Quindi $q \geq 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Consideriamo ora $n_1 = 7$, $n_2 = 13$. Sicuramente q divide sia N_1 che N_2 quindi q divide MCD(N_1,N_2). Si trova che $N_1 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$, $N_2 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$. Allora MCD($N_1$,$N_2$) $= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Allora $q = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Volendo estrarre da q il massimo quadrato si trova che $k^2 = 2^4 \cdot 3^2$ cioè $k = 12$.

13. Qual è il minimo intero positivo c tale che esista almeno una coppia (a, b) di interi positivi distinti tali che $2c^2 = a^2 + b^2$?
SOLUZIONE: 5.

14. Per quanti interi relativi n si ha che $\frac{3n}{n+5}$ è intero relativo e divisibile per 4?
SOLUZIONE: 4.

Sostituendo $m = n + 5$, l'espressione data diventa $\frac{3m-15}{m} = 3 - \frac{15}{m}$. Affinchè sia intera, quindi, m deve essere un divisore di 15, per cui le possibilità sono solo $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$.Di queste, le uniche per cui l'espressione è un multiplo di 4 sono 1, -3, 5, -15, per cui gli n cercati sono -20, -8, -4 e 0.

15. Qual è la seconda cifra (partendo da sinistra) del numero

$$(10^{16} + 1)(10^8 + 1)(10^4 + 1)(10^2 + 1)(10 + 1)?$$

SOLUZIONE:1.

16. Due numeri a e b sono tali che $\frac{3a+b}{a-b} = 2$. Quanto vale $\frac{a^3}{b^3}$?
SOLUZIONE:-27.
$3a + b = 2a - 2b$, quindi $a = -3b$, e perciò $\frac{a^3}{b^3} = (-3)^3 = -27$.

17. Quanti sono i numeri di due cifre tali che, se si sottrae la somma delle cifre dal numero di partenza, si ottiene 45?
SOLUZIONE : 10.

18. (Disfida 2014) Quanti sono i numeri interi positivi minori di 10000000 e divisibili per 6 che si scrivono usando soltanto le cifre 0 e 1?
SOLUZIONE : 21.

19. (Disfida 2014) Quanti sono gli interi positivi di cinque cifre tali che il prodotto delle loro cifre sia 2000 ?
SOLUZIONE : 30.

20. (Disfida 2014) Quanto fa la somma dei numeri interi positivi minori di 100 che si possono scrivere in almeno due modi distinti come differenza di quadrati di numeri interi positivi?
SOLUZIONE: 2012.

21. (Disfida 2013) Si scrivono tutte le possibili coppie (p, q) di numeri primi (dunque maggiori di 1) tali che

    (a) $p + 2q$ sia primo
    (b) $6p + q$ sia primo
    (c) $p + q - 124$ sia primo.

    Poi si scrive il prodotto $p \cdot q$ per ciascuna di queste coppie. Qual è il minimo prodotto che si ottiene?
SOLUZIONE: 1469.

22. (Disfida 2013) Tutte le pagine tra le due copertine di un libro sono numerate in successione a partire da 1. Nel libro è stato strappato esattamente un foglio e la somma dei numeri sulle pagine rimanenti è 65000. Quante pagine aveva in origine il libro? [Ogni foglio ha due pagine, ciascuna numerata.]
SOLUZIONE : 362.

23. (IMO 2009) Siano $a < b < c < d < e$ numeri reali. Si calcolano tutte le possibili somme a due a due di questi 5 numeri. Di queste 10 somme, le tre più piccole sono 32,36,37, mentre le due più grandi sono 48 e 51. Si determinino tutti i possibili valori che può assumere e.
SOLUZIONE : $e = 27.5$

Buon lavoro !!