PROBLEMI DI GEOMETRIA PIANA

31/10/2014

1. **Mai più dolcetti I**

   Stanco del solito “dolcetto o scherzetto” il signor Lorenz decide che sottoporrà ad ogni ragazzino che busserà alla sua porta un problema. Solo dopo che l'avrà risolto egli potrà ricevere uno dei suoi squisiti dolcetti al cioccolato! Il primo indovinello recita così:

   “Un quadrato di lato l è inscritto in una circonferenza. Determinare la lunghezza del lato del quadrato inscritto in uno dei segmenti circolari così ottenuti.”

   Soluzione: Siano A e B i vertici del quadrato più piccolo giacenti sulla circonferenza. Tracciamo il raggio $OA = r = \frac{\sqrt{2}}{2}l$ e l'altezza OH relativa al lato AB. Poniamo $x = HA$ e scriviamo il teorema di Pitagora per il triangolo OAH:

   $$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}l\right)^2 = x^2 + (2x + \frac{l}{2})^2\,,$$

   che è un'equazione di secondo grado in x. Essa ha come soluzione accettabile $l = \frac{l}{10}$.

2. **Mai più dolcetti II**

   Il secondo problema, un po' più macabro del primo, suona così:

   “Siano ABC un triangolo e Γ la sua circonferenza circoscritta. Chiamiamo α l'angolo in A. Tracciando le tangenti a Γ in A, B e C si ottiene un nuovo triangolo; qual è l'ampiezza dell'angolo del nuovo triangolo opposto al lato che contiene A? ”

   Soluzione: Chiamiamo con $\hat{D}$ l'angolo che dobbiamo trovare e con O il centro della circonferenza Γ. Allora

   $$\hat{D} = 180° - B\hat{O}C = 180° - 2B\hat{A}C = 180° - 2\alpha.$$

3. **Mai più dolcetti III**

   Ed infine l'ultimo, terrificante problema:

   “In un cubo di lato 1 è inscritta una sfera; oltre a questa vi sono altre otto sfere più piccole, ognuna tangente esternamente alla sfera grande e tangente anche a tre facce del cubo. Qual è il raggio delle sfere più piccole?”

   Soluzione: Chiamiamo con r il raggio delle sfere più piccole e tracciamo la diagonale AC del cubo. Essa passa per il punto di tangenza T tra una delle sfere piccole di centro P e la sfera grande di centro O, per P e per O. Essendo OA lungo metà delle diagonale del cubo e $PA = r\sqrt{3}$, in quanto diagonale di un cubo di lato r, possiamo scrivere:

   $$\frac{\sqrt{3}}{2} = OT + TP + PA = \frac{1}{2} + r + r\sqrt{3},$$

   da cui ricaviamo

   $$r = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\,.$$