**Il solido tagliato**

I tagli a un terzo di ogni spigolo producono triangoli dei tetraedri più piccoli con lato pari a un terzo di quello di partenza. Quindi, se $V$ indica il volume del tetraedro iniziale, il volume complessivo dei tetraedri rimossi sarà pari a $4\frac{V}{27}$. Il rapporto tra i volumi cercato è quindi:

$$\frac{V}{\frac{23}{27}V} = \frac{27}{23}.$$

Il ragionamento per le aree è simile. Se denotiamo con $S$ l'area di ogni faccia del solido originario, l'area totale rimossa sarà pari a $6\frac{S}{9} = \frac{2}{3}S$. L'area totale del solido tagliato risulta quindi essere $4S - \frac{2}{3}S = \frac{10}{3}S$. Il rapporto cercato risulta allora:

$$\frac{4S}{\frac{10}{3}S} = \frac{6}{5}.$$

**Le zucche del signor Lorenz**

Dati n numeri positivi $x_1, \ldots, x_n$ ricordiamo la seguente catena di disuguaglianze tra medie:

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \mathrm{HM}\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \mathrm{GM}\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \mathrm{AM}\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \mathrm{QM}\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Si intende con AM la media aritmetica, con GM la media geometrica, con HM la media armonica e con QM la media quadratica. Dalla disuguaglianza appena citata risulta facilmente che la catena è costituita da uguaglianze se e solo se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Applichiamo in particolare la disuguaglianza GM $\leq$ AM ai numeri $\{2a, 3b, 5c\}$. Otteniamo:

$$\sqrt[3]{30abc} \leq \frac{2a + 3b + 5c}{3} = 10.$$

Quindi risulta $30abc \leq 1000$.

Da cui ricaviamo che $abc$ ha massimo uguale a $\frac{100}{3}$ (e tale massimo è assunto esattamente quando $2a = 3b = 5c$). Ricordando che il volume di un ellissoide è uguale a $\frac{4}{3}\pi abc$, otteniamo $V_{\max} = \frac{400}{9}\pi$.

**Zucche poliedriche**

Ricordiamo che per ogni poliedro convesso, vale la formula di Eulero $V + F - E = 2$. Dove con $F$ si indica il numero delle facce del poliedro, $V$ il numero dei suoi vertici e con $E$ il numero dei suoi spigoli.

Sapendo che le facce sono pentagonali ricaviamo immediatamente che $E = \frac{5F}{2} = \frac{5}{2}2014 = 5035$. Applicando la formula di Eulero troviamo

$$V = E + 2 - F = 5035 + 2 - 2014 = 3023.$$