Problemi Allenamento

Andrea Galasso

13/02/2019

1 Combinatoria e probabilità

Problemi tratti dalla "Disfida Matematica femminile 2019".

Problema 1.1 (La pesca). ***Oberon:*** *"Puck, mio fedele Puck! Mi devo vendicare di Titania. Continua a sbeffeggiarmi perché non conosco la matematica."*
Puck: *(Tra sé) "È vero, che cosa altro dovrebbe fare?"*
Oberon: *"Aiutami! Questo cesto contiene tutti i numeri da* 10 *a* 99*, estremi inclusi. A caso, tu ne scegli uno, poi lo rimetti nel cesto, a quel punto io ne scelgo uno. Io vinco se il numero che ho scelto ha sia le cifre delle unità che quelle delle decine maggiore o uguale alla rispettiva cifre del numero che tu hai scelto. Qual è la probabilità che io vinca?"*

Svolgimento: Indicheremo con x_1 la cifra delle decine del primo numero estratto e con x_2 la cifra delle unità, schematicamente $\boxed{x_1 \mid x_2}$. Similmente scriveremo $\boxed{y_1 \mid y_2}$ per indicare il secondo numero estratto. Quindi si ha

$$\Pr(y_1 \geq x_1 \text{ e } y_2 \geq x_2) = \Pr(y_1 \geq x_1) \cdot \Pr(y_2 \geq x_2).$$

Prima calcoliamo $\Pr(y_1 \geq x_1)$. I casi possibili sono le coppie (x_1, y_1) con $1 \leq x_1, y_1 \leq 9$, che sono in tutto 9^2. I casi favorevoli sono le coppie con $y_1 \geq x_1$:

- se $y_1 = 1$ c'è solo la coppia $(1, 1)$;
- se $y_1 = 2$ ci sono le coppie $(2, 1)$, $(2, 2)$;
- se $y_1 = 3$ le coppie sono 3;

e così via... In tutto sono $9 \cdot (9 + 1)/2 = 45$. In modo simile si ragiona per $\Pr(y_2 \geq x_2)$. Si ha quindi:

$$\Pr(y_1 \geq x_1 \text{ e } y_2 \geq x_2) = \Pr(y_1 \geq x_1) \cdot \Pr(y_2 \geq x_2) = \frac{45}{81} \cdot \frac{55}{100}.$$

$\square$

Problema 1.2 (Insieme). ***Titania:*** *"Puck, quanto fa la somma di tutti i prodotti*

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$$

ottenuti scegliendo x, a_1, a_2, a_3 *e* a_4 *in tutti i modi possibili purché gli insiemi* $\{x,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$ *e* $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ *siano uguali?"*
Oberon: *"Non so che cosa sia un insieme..."*

Svolgimento. Fissato $x = 1$ ci sono 4! modi di scegliere a_1, a_2, a_3 e a_4 in $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$; fissato $x = 2$ ci sono 4! modi di scegliere a_1, a_2, a_3 e a_4 in $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$; e così via... Calcolando esplicitamente i prodotti per un certo x fissato e moltiplicando per 4! si ottiene 960. $\square$

Problema 1.3 (L'equazione macchiata)**.** ***Titania:*** *(A Oberon) "Considera l'equazione che ho scritto."*
Oberon: *"Che cosa sono quei pallini neri?"*
Titania: *"Temo che sia stato Puck che ha fatto uno scherzo: tutti i segni + e − che erano presenti sono stati coperti con pallini neri. (Quello che si legge è $x^{11} \bullet x^{10} \bullet \cdots \bullet x \bullet 1 = 0$). Beh, facciamo così. Quante sono le successioni di + e − che, inserite nell'equazione sono tali che vi sia almeno una soluzione intera?"*

Svolgimento: Le radici del polinomio possono essere solo ± 1. Contiamo i polinomi che hanno 1 come soluzione, quelli che hanno -1 e sottriamo a questi quelli che hanno radici sia 1 che -1. Riscriviamo l'equazione come

$$x \cdot (x^{10} \bullet x^8 \bullet \cdots \bullet x \bullet 1) = -(\bullet x^{10} \bullet x^8 \bullet \cdots \bullet x \bullet 1)\,. \tag{1}$$

A) Se $x = 1$ è soluzione allora il numero di segni $\bullet$ che sono $-$ a sinistra deve essere uguale al numero di segni $\bullet$ che sono $+$ a destra. Quindi,

- se c'è solo **un segno meno a sinistra**, a destra deve esserci un solo segno +. Tali polinomi sono tanti quanti gli anagrammi della parola $\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}$ moltiplicato per gli anagrammi della parola $\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}$;
- se ci solo **due segni meno a sinistra**, a destra devono esserci due segni +. Tali polinomi sono tanti quanti gli anagrammi della parola $\boxed{-}\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}$ moltiplicato per gli anagrammi della parola $\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}$;

e così via... In tutto sono

$$\sum_{j=0}^{5} \binom{5}{j} \cdot \binom{6}{j} = 462.$$

B) Se $x = -1$ è soluzione allora il numero di segni $\bullet$ che sono $-$ a sinistra deve essere uguale al numero di segni $\bullet$ che sono $-$ a destra. Si ottiene, ragionando come nel punto A), 462.

C) Se sia $x = -1$ che $x = 1$ sono soluzioni allora ci sono tre segni + e tre − a destra e analogamente a sinistra. In tutto sono

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{3} = 200.$$

Quindi in totale si ha $2 \cdot 462 - 200 = 724$. $\square$

Problema 1.4. *Quante parole di tre lettere si possono formare usando a, b, c, d, eventualmente ripetendole, che non finiscano per d?*

Svolgimento: Tutte le possibili parole di tre lettere che si possono formare utilizzando $\{a, b, c, d\}$ sono

$$DR_{4,3} = 4^3 = 64\,.$$

Il numero di parole di tre lettere che finiscono per d, i.e. $\boxed{}\boxed{}\boxed{d}$, sono il numero delle disposizioni di due lettere nei due spazi rimanenti,

$$DR_{4,2} = 4^2 = 16\,,$$

da cui il risulato si ottiene sottraendo al numero di parole possibili quelle che finiscono per d, cioè $64 - 16 = 48$. □

Problema 1.5. *Calcolare quanti sono i numeri di 4 cifre, tutte fra loro diverse, divisibili per cinque.*

Svolgimento: Un numero di quattro cifre è divisibile per cinque se della forma $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{0}$ o $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}$. La quantità di possibili numeri di quattro cifre non ripetute che finiscono per zero è semplicemente la disposizione delle nove cifre $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ nei tre spazi rimanenti, cioè

$$D_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504\,.$$

Per calcolare invece numeri del tipo $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}$ occorre prestare attenzione perché nella prima cifra a sinistra non può esserci lo zero. Quindi dobbiamo suddividere ulteriormente in tre casi: $\boxed{}\boxed{0}\boxed{}\boxed{5}$, $\boxed{}\boxed{}\boxed{0}\boxed{5}$ e $\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}$, dove non è ammesso che compaiano zeri negli spazi vuoti. La quantità di numeri del tipo $\boxed{}\boxed{0}\boxed{}\boxed{5}$ è data dalle disposizioni delle 8 cifre $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ nelle 2 caselle vuote, si ha quindi

$$D_{8,2} = 56$$

e, in modo analogo, ci saranno 56 numeri della forma $\boxed{}\boxed{}\boxed{0}\boxed{5}$. L'ultima eventualità è data dalle disposizioni delle otto cifre $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ nei tre spazi vuoti, i.e. $D_{8,3}$. Concludendo, in modo schematico si ha:

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{0} + \boxed{}\boxed{0}\boxed{}\boxed{5} + \boxed{}\boxed{}\boxed{0}\boxed{5} + \boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{5}$$
$$= 504 + 56 + 56 + 336 = 952\,.$$

□

Problema 1.6. *Quante parole di tre lettere si possono formare usando $\{a, b, c, d\}$ che abbiano esattamente due b?*

Svolgimento: Una parola che abbia esattamente due b è un anagramma di $\boxed{b}\boxed{b}\boxed{x}$, dove x è una lettera scelta tra $\{a, c, d\}$. Quindi il numero cercato è dato dai possibili anagrammi della parola $\boxed{b}\boxed{b}\boxed{x}$ moltiplicato per il numero delle possibili scelte di x, che sono 3. Per cui la soluzione è

$$\frac{3!}{2!} \cdot 3 = 9\,.$$

□

Problema 1.7. *In quanti modi si possono assegnare 3 caramelle diverse fra sei bambini, in modo che ogni bambino riceva al più una caramella (tutte le caramelle devono essere distribuite).*

Svolgimento: Supponiamo di associare ad ogni bambino una casella, se essa contiene la lettera x allora il bambino non riceverà alcuna caramella, se invece la casella contiene una tra le lettere $\{a, b, c\}$ allora il bambino corrispondente a quella casella riceverà una caramella. Ad esempio la sequenza $\boxed{a \mid b \mid x \mid x \mid c \mid x}$ significa che il primo, il secondo e il quinto bambino hanno ricevuto una caramella, gli altri no. Quindi è chiaro che la soluzione sarà data dagli anagrammi della parola $\boxed{a \mid b \mid x \mid x \mid c \mid x}$, che sono

$$\frac{6!}{3!} = 120\,.$$

□

Problema 1.8. *Determinare il numero complessivo di incontri in un torneo di scacchi con* 8 *giocatori, sapendo che devono incontrarsi tutti tra loro.*

Svolgimento: La soluzione è data dal numero di coppie che si possono formare con 8 persone, poichè ad ogni coppia corrisponde un incontro, quindi si ha

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2!6!} = 28\,.$$

□

Problema 1.9. *In una stanza ci sono* 8 *coppie sposate. Vengono portate fuori dalla stanza* 6 *persone a caso. Calcolare la probabilità che siano state portate fuori* 3 *coppie di sposi.*

Svolgimento: Il numero di casi possibili è dato dal numero delle sestine componibili con 16 persone, cioè $C_{16,6} = 13 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 7$. I casi favorevoli corrispondono ai gruppi di sei persone formati da tre coppie di sposi. La cardinalità di tale inseme è data dal numero di possibili terne costituibili con 8 coppie, e quindi

$$\text{“Numero di casi favorevoli”} = C_{8,3} = 56\,.$$

Quindi si ha

$$P(\text{“Estrarre 3 coppie di sposi”}) = \frac{1}{143}\,.$$

□

Problema 1.10. *Si estraggono* 3 *carte dalle* 13 *di quadri senza reinserimento. Calcolare la probabilità che la seconda estratta sia l'asso di quadri.*

Svolgimento: **Primo modo:** Le possibili estrazioni ordinate di tre carte tra 13 sono $D_{13,3}$. Un'estrazione favorevole è del tipo $\boxed{x \mid A \mid y}$, dove x e y denotano due delle rimanenti 12 carte. Quindi il numero delle estrazioni favorevoli è dato dalle disposizioni delle 12 carte di quadri, asso escluso, nei due spazi rimanenti, i.e. $D_{12,2}$. E quindi

$$P(\boxed{x \mid A \mid y}) = \frac{D_{12,2}}{D_{13,3}}\,.$$

□