Allenamenti di matematica: Simulazione di Gara

14 dicembre 2012

Le risposte vanno indicate con una sequenza di 4 cifre; se la risposta contenesse più di 4 cifre, andranno indicate solo le ultime 4. Se la risposta contenesse meno di 4 cifre è necessario anteporre la cifra 0 quante volte occorre.

1. **Il veggente.** Per conoscere in anticipo il vincitore di questa gara a squadre, un indovino ha ordinato una sfera di cristallo di 50 cm di raggio. La sfera è stata trasportata in una scatola cubica di un metro di lato. Data la fragilità dell'oggetto, la sfera era tenuta ferma, all'interno della scatola, da otto sferette di gomma uguali tra di loro e poste in corrispondenza dei vertici del cubo in modo da impedire ogni movimento della sfera di cristallo. Determinare, in millimetri, il raggio delle sfere di gomma usate per l'imballaggio, considerando $\sqrt{3} = 1,732$.

2. **Età evidenti.** Guardando una fotografia sul tavolo John chiese a Mike: "Siete tu e Bill, vero? Quanti anni ha ora?" Mike ci pensò un attimo e rispose: "Un indovinello per te: se tu dividi la tua età per la mia e sottrai il risultato alla tua età divisa per la sua ottieni un settimo della tua età". Quanti anni hanno Mike e Bill?

   Scrivere le rispettive età nell'ordine una dopo l'altra.

3. **Un bel polinomio.** Il professor Nando è solito chiamare "n-bello" il polinomio monico di grado $n+1$ le cui radici sono tutti e soli gli elementi dell'insieme $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$. Una mattina Nando assegna ai propri alunni il compito di calcolare i primi tre coefficienti del polinomio 2012-bello, ordinato secondo le potenze decrescenti dell'indeterminata. Ammesso che gli studenti abbiano svolto correttamente l'esercizio, quale numero hanno trovato per il coefficiente del termine di grado 2012?

   Indicare nella risposta le cifre corrispondenti a migliaia, centinaia, decine ed unità.

4. **Il capitano Barbablu.** Il capitano Barbablu sta studiando la mappa di un tesoro sulla quale sono segnati tre punti A, B, C che sono i vertici di un triangolo isoscele. La base AB del triangolo misura l e l'angolo al vertice misura 120 gradi. Il capitano si trova nel punto B, sa che il tesoro si trova nel punto di intersezione tra il lato BC e la bisettrice dell'angolo in A. Quanto spazio dovrà percorrere per arrivare al tesoro?

   Risolvere il problema in modo astratto sostituendo alla fine $l = 3000$ e $\sqrt{3} = 1,732$. Come risultato si dia la parte intera del valore trovato.

5. **Massimo MCD.** Siano a, b e c tre interi positivi, dispari, distinti e minori di 100. Quanto può valere al massimo $\mathrm{MCD}(a, b, c)$?

6. **Indovina.** C'era una giovane donna di nome Chris che, quando le si domandava l'età, rispondeva così: "I due terzi del suo quadrato uguagliano un cubo". Quanti anni ha Chris?

7. **Quadratoni.** Bob a Joe: "444888 è il quadrato di 667 diminuito di 1. Credi che questo sia l'unico numero da 6 cifre che sia uguale a un quadrato diminuito di 1 e che abbia la seconda metà delle cifre doppia rispetto alla prima metà?" Joe rispose: "No, ce n'è un altro, ma vediamo se puoi trovarlo da solo".

   Indicare nella risposta il numero privato della prima e della sesta cifra.

8. **Pizza party.** Bruno è un gran buongustaio. Per festeggiare il suo compleanno va in pizzeria e consulta il menu. Si accorge subito che esso è composto da esattamente 2013 pizze differenti e che contiene tutte le pizze che piacciono a Bruno. Le pizze che piacciono a Bruno sono fatte con esattamente 5 ingredienti scelti tra i seguenti: Aglio, Basilico, Cipolla, Datteri, Emmenthal, Fegatini, Grana, Pomodoro, Prezzemolo e Panna. Tuttavia a Bruno non piacciono le pizze che contengono sia Datteri che Fegatini insieme, né quelle che contengono sia Aglio che Emmenthal, a meno che (in entrambi i casi) non ci sia la Panna, che amalgama tutti i sapori. Si sa inoltre che da quando era piccolo Bruno non riesce a digerire più di un ingrediente che inizi per "P" sulla stessa pizza. Supponendo che Bruno scelga casualmente la pizza tra quelle del menu, calcolare la probabilità che la pizza scelta sia di suo gradimento.

   Esprimere il risultato come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.

9. **Lo stadio.** Per le Olimpiadi della Matematica 2012 stato costruito un nuovo stadio di forma circolare avente raggio $2\sqrt{2}$ dam. Si è deciso di tassellare l'ingresso con delle piastrelle che costano 10 al m^2. La piantina si ottiene tracciando dal centro O un segmento OP di lunghezza 4 dam bisettrice del primo quadrante $\widehat{EF}$ e congiungendo P con gli estremi E ed F. Tracciata infine la tangente nel punto di intersezione di OP con la circonferenza e chiamato DA il segmento ottenuto dall'intersezione di quest'ultima con PE e PF, si tracci il rettangolo di base DA e altezza uguale a OP esterno alla circonferenza. Sapendo che l'ingresso è la figura esterna alla circonferenza, trovare a quanto ammonterà il prezzo per piastrellare l'area dell'ingresso.

   Si arrotondi π con 3,1415 e si scriva il risultato a partire dalla prima cifra significativa.

10. **La piastrella.** Per piastrellare l'ingresso dello stadio si è deciso di utilizzare delle piastrelle triangolari, ottenute da un triangolo isoscele di base $AB = \sqrt{5/7}$ e di altezza CH. Detto G il baricentro di ABC si consideri il triangolo AGH avente baricentro M. Detto L il punto medio di AG si determini la lunghezza dell'altezza CH in modo da rendere $AL = AM$.

    Scrivere il risultato a partire dalla prima cifra significativa.

11. **Potentissime.** Qual è il prodotto tra la cifra finale del numero $(((((((7^7)^7)^7)^7)^7)^7)^7)^7 = 7^{(7^8)}$ e la cifra finale del numero $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}}$?

12. **Codici binari.** Determinare il numero delle $2n$-uple $(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ tali che:

    - ciascuno degli x_i e degli y_i è 0 oppure 1;
    - la somma $x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$ sia un numero pari.

    Calcolare il risultato nel caso $n = 6$.

13. **Ricorsioni moderne.** Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

    Sia ora $f^{(n)}(x) = f\Big(f\big(\ldots(f(x))\big)\Big)$, cioè la f composta con se stessa n volte.

    Calcolare $\dfrac{1}{f^{(2012)}(2013)}$ e, nella risposta, indicarne le prime quattro cifre decimali.

14. **Pitagora radicale.** Sia dato il polinomio $x^3 - 125x^2 + 5031x - 64395$. Trovare $a^2 + b^2 + c^2$ dove a, b e c sono le radici di tale polinomio.

15. **Condizione sufficiente.** Si determini il più piccolo intero positivo α tale che, per ogni coppia x, y di numeri reali, con $|x| \geq 1$ e $|y| \geq 1$, e per ogni numero primo positivo p si abbia

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{\Big||x+2012| - |y+2013|\Big| (105264)^k}{(-\alpha)^{k-p}\left(|x| + p|y|^{2013} + 12357\right)} \leq (2013\alpha)^p .$$

16. **Successione.** Sia a un intero positivo. Sia definita la successione $x_0, x_1, \ldots$ ponendo $x_0 = a$, $x_1 = 3$ e $x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3$ per $n > 1$. Determinare il più grande intero k per cui esiste un primo p tale che p^k divida $x_{2011} - 1$.

17. **Geometria in piazza.** Nella piazza di un piccolo paesino sta per essere realizzata una moderna opera d'arte costituita da quattro gruppi scultorei, tutti e quattro poggianti su dei basamenti cilindrici. Il primo problema che si pone è quello di disporre armonicamente nel centro della piazza i quattro basamenti; il geometra comunale propone di disporre sulla pianta della struttura le quattro circonferenze che rappresentano i basamenti in modo che esse risultino essere le quattro circonferenze inscritta ed ex-inscritte ad un certo triangolo. Sono fissate, per motivi costruttivi, le aree dei tre cerchi ex-inscritti: esse sono pari a 5184π m^2, 20736π m^2 e 28224π m^2. Si chiede di determinare la misura dell'area, T, del sopracitato triangolo e di quella, C, del cerchio inscritto; si fornisca poi come risultato il valore della parte intera di $(T - C\pi^{-1})$, misurata in m^2.

18. **La partita di calcio.** Nel tempo libero Bruno gioca a calcio nella squadra di Non So Dove. Proprio oggi il suo team dovrà affrontare la assai più forte e favorita squadra dei Matematici Incalliti. In base a stime statistiche si può affermare che: la squadra di Non So Dove tira in porta 3 volte a partita e per ogni tiro ha una probabilità di 1/3 di segnare; la squadra dei Matematici Incalliti tira in porta 5 volte a partita e per ogni tiro ha una probabilità di 1/2 di segnare. Malgrado il cattivo pronostico si sa che il calcio è strano, e riserva sorprese. Calcolare la probabilità che la squadra di Bruno vinca la partita.

    Dopo aver ridotto la frazione ai minimi termini inserire nelle prime due caselle, a sinistra, le ultime due cifre del numeratore, e nelle ultime due caselle le ultime due cifre del denominatore. Esempio: $234/137 \mapsto 3437$.

19. **Somme quadrate.** Sia $H(x)$ un polinomio a coefficienti interi. Sapendo che esistono j, k, l interi distinti tali che $H(j) = H(k) = H(l) = -5$ e che $H(1) = 6$, qual è il valore massimo che può assumere la somma dei quadrati di j, k, l?

20. **L'interrogazione.** Bruno deve essere interrogato in matematica ma non è preparato. La professoressa è solita interrogare 2 persone alla volta scelte in maniera aleatoria utilizzando un dado a 6 facce e il Grande Manuale della Matematica che conta di esattamente 1000 pagine. Tira il dado e apre casualmente il Grande Manuale: se il risultato del dado è un numero pari, valuterà la pagina pari del libro aperto, se il risultato del dado è

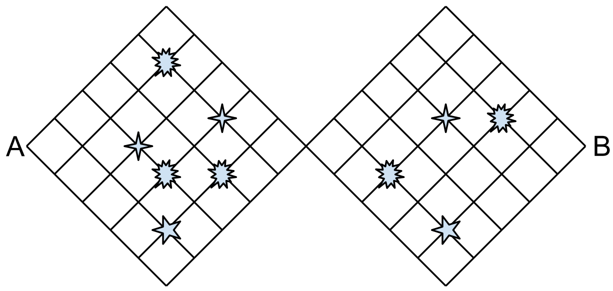
dispari, viceversa. Trovata la pagina ne considera il numero (scritto ovviamente in base 10) e ne somma le cifre. Il risultato di tale somma indica l'alunno da interrogare in base all'elenco sul registro. Supponendo che gli alunni siano 22, che il primo interrogato estratto sia il numero 20 dell'elenco, e sapendo che Bruno è il numero 9 dell'elenco, calcolare la probabilità che Bruno non venga interrogato. Se l'estrazione dà come esito un numero a cui non corrisponde nessun alunno o a cui corrisponde l'alunno gi stato estratto, deve essere ripetuta, quindi ignorata.

Esprimere il risultato dopo averlo arrotondato per difetto alla quarta cifra decimale e successivamente moltiplicato per 10000.

21. **Sulla slitta.** Babbo Natale è partito dal Polo Nord (punto A) per consegnare i regali, ma il percorso tra i ghiacci pare essere più impervio del previsto. La sua slitta può muoversi solamente lungo i lati della griglia riportata in figura secondo i seguenti vincoli:

- può precedere solamente verso destra;
- se giunge in un punto dove è presente una stella a quattro o cinque punte le sue renne possono saltare direttamente ad un altro punto della mappa in cui sia presente lo stesso simbolo (sempre a patto che il punto di arrivo si trovi più a destra di quello di partenza)
- non può assolutamente passare nei punti in cui è presente la nuvoletta con le punte poiché cadrebbe in pericolosi crepacci.

In quanti modi Babbo Natale può giungere sano e salvo nel punto B?



RISPOSTE

1. [0134]
2. [0426]
3. 202[5078]
4. [1098]
5. [0019]
6. [0018]
7. 1[1222]4
8. [2084]
9. [9717]
10. [1500]
11. [0021]
12. [2080]
13. [0004]
14. [5563]
15. [0051]
16. [2011]
17. [6670]
18. [0227]
19. [0148]
20. [9408]
21. [7953]