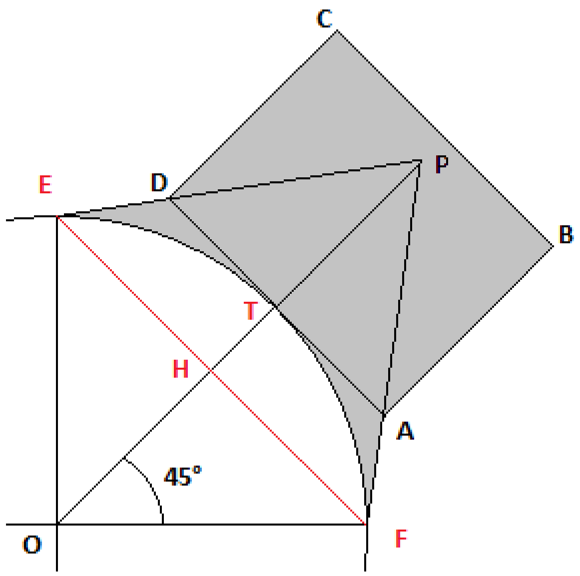
SOLUZIONI

A) Lo stadio



Conviene tracciare il segmento EF e riscrivere i dati:

a) OP = $\sqrt{2}$R b) EH = HP = R/$\sqrt{2}$

c) DT = TP = OP – R = ($\sqrt{2}$-1)R

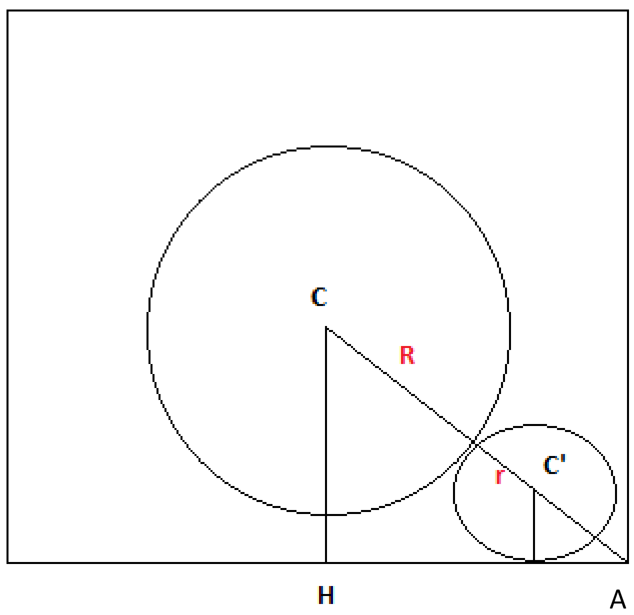
A(DTE) = A(OPE) - A(OTE) - A(DTP) = (R^2/2) – (πR^2/8) – (($\sqrt{2}$-1)^2R^2)/2 = … = 8$\sqrt{2}$ – 8 – π.

A(Totale) = 2A(DTE) + A(ABCD) = 16$\sqrt{2}$ – 16 – 2π + 4*2R($\sqrt{2}$ − 1) = … = (16 - 2 π) dam^2 = (16 - 2 π)*10 m^2

Prezzo = A(Totale)*10 = 97,17 €

RISPOSTA: 9 7 1 7

B) Il veggente



La sezione ottenuta intersecando il cubo con il piano passante per la diagonale di una faccia e perpendicolare alla faccia che la contiene è:

CH= 50 cm AH=50$\sqrt{2}$cm

AHC e AKC' sono simili → CH : C'K = AH : AK

AK = (C'K*AH)/CH = r$\sqrt{2}$

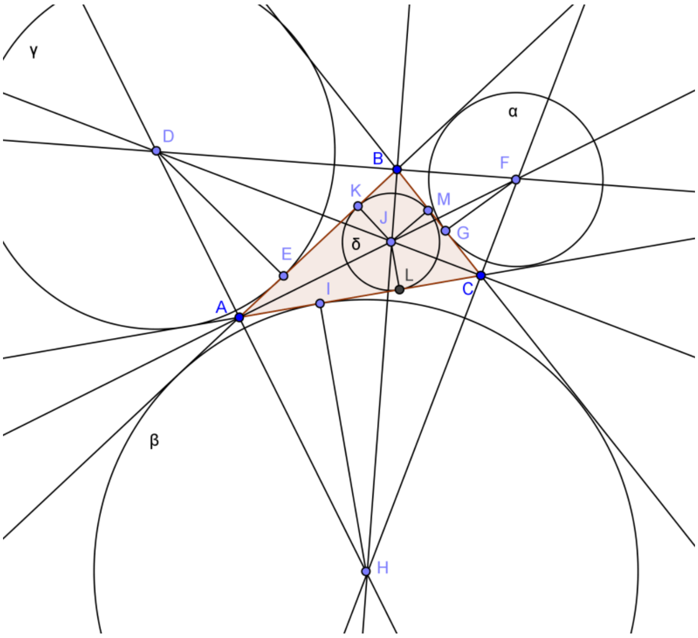
C'A = $\sqrt{2r^2 + r^2}$ = r $\sqrt{3}$

CA = $\sqrt{CH^2 + HA^2}$ = C'C + C'A

50$\sqrt{3}$ = R + r + $\sqrt{3}r$ = 40 + ($\sqrt{3}$+1)r → r=17

RISPOSTA 0017

C) Geometria in piazza



Dai dati del problema, possiamo ricavare con calcoli elementari le seguenti misure:

$\overline{FG}$ = 72m (raggio di α)

$\overline{DE}$ = 144m (raggio di γ)

$\overline{HI}$ = 168m (raggio di β)

D'ora in poi indicheremo con r_1, r_2 ed r_3 le lunghezze dei segmenti di cui sopra, con 2p e p le lunghezze del perimetro e del semiperimetro del triangolo ΔABC, con a, b e c quelle dei lati del medesimo (AB, BC e CA rispettivamente), con r quella dei segmenti congruenti JK, JM, JL e con T e C. Vogliamo ricavare, a partire dal problema geometrico, delle relazioni algebriche tra tali valori in modo da poter determinare ciò che manca al fine di ottenere la quantità cercata, ovvero la parte intera di $(T - C\pi^{(-1)})$, come da traccia. Vale anzitutto la formula dell'area di Erone che, applicata al triangolo ΔABC, restituisce la prima delle uguaglianze cercate:

$$T = \sqrt{(p(p - a)(p - b)(p - c))}. \quad (1)$$

Vediamo ora di ricavare altre uguaglianze dalla figura, delle quali, poiché meno note, daremo dimostrazione diretta. Per la formula classica dell'area di un triangolo ("area = base per altezza fratto due") e altri fatti evidenti si hanno le seguenti relazioni:

$$T = \text{area}(\Delta JAB) + \text{area}(\Delta JBC) + \text{area}(\Delta JCA);$$

$$\text{area}(\Delta JAB) = ar/2;\ \text{area}(\Delta JBC) = br/2;\ \text{area}(\Delta JCA) = cr/2;\ 2p = a + b + c.$$

"Unendole" otteniamo una seconda utile uguaglianza: $T = pr$. (2)

Proseguiamo, bistrattando la solita formula dell'area del triangolo; valgono le seguenti identità: $T = \text{area}(\Delta ABH) + \text{area}(\Delta CBH) - \text{area}(\Delta ACH)$;

$$\text{area}(\Delta ACH) = cr_3/2;\ \text{area}(\Delta ABH) = ar_3/2;\ \text{area}(\Delta CBH) = br_3/2;\ a + b - c = 2p - 2c.$$

Ancora una volta "unendole", otteniamo una terza utile uguaglianza:

$$T = (p - c)r_3. \quad (3)$$

In maniera del tutto analoga otteniamo:

$$T = (p - a)r_2; \quad (4) \quad T = (p - b)r_1. \quad (5)$$

Dal confronto tra la (2) e la (3), la (2) e la (4), la (2) e la (5), otteniamo rispettivamente:

$$r/r_3 = (p - c)/p;\ r/r_2 = (p - a)/p;\ r/r_1 = (p - b)/p.$$

Sommando, membro a membro, otteniamo:

$$r/r_1 + r/r_2 + r/r_3 = (3p - (a + b + c))/p,$$

$$r/r_1 + r/r_2 + r/r_3 = 1,\ r_1^{(-1)} + r_2^{(-1)} + r_3^{(-1)} = r^{(-1)}. \quad (6)$$

Mettendo a sistema le sei equazioni ottenute e risolvendo nelle incognite T, r, p, a, b e c ricaviamo infine:

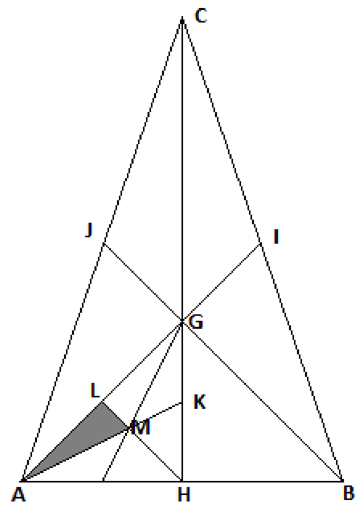
$$T = 8064m^2,\ r = 8064/216m;\ p = 216\ m,\ a = 160m,\ b = 104m,\ c = 168m.$$

La quantità cercata è quindi la parte intera di

$$(T - C\pi^{(-1)}) = (8064 - \pi(8064/216)^2\pi^{(-1)})m^2 = ((8064*216^2 - 8064^2)/216^2)m^2 \approx 6670.222m^2$$

misurata in m^2, ossia **6670**.

D) La piastrella



Ricordando che il baricentro G divide la mediana in due parti, a 2/3 della sua lunghezza a partire dal vertice, si evince che:

a) AM = (2/3)*AK

b) AL = (1/2)*AG

Imponendo AM = AL, si trova:

$$\frac{2}{3}\text{AK} = \frac{1}{2}\text{AG} \rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CH}{6}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{CH}{3}\right)^2}$$

$$\ldots \qquad CH^2 = \frac{63}{20} * AB^2$$

Da cui CH $= \frac{3}{2}$ e quindi la risposta è: 1500

E) IL capitano Barbablu

Soluzione: 5421