Problema (Disuguaglianze)

Si determini la più piccola costante $\alpha \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $|x|, |y| \geq 1$ e per ogni p primo positivo si abbia:

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|\,(105264)^k}{(-\alpha^2)^{k-p}\left(|x|+p|y|^{2013}+1235\cancel{7}\right)} \leq (2013\alpha)^p$$

Svolgimento

Il primo membro della $(*)$ può scriversi come:

$$\frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x|+p|y|^{2013}+1235\cancel{7}} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (105264)^k (-\alpha^2)^{p-k}$$

, e quindi la $(*)$ diventa:

$$= \frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x|+p|y|^{2013}+1235\cancel{7}} (105264-\alpha^2)^p \leq (2013\alpha)^p$$

Supponiamo per il momento $(105264-\alpha^2) > 0$ e studiamo il problema sulla nuova disegua-glianza

$$\frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x|+p|y|^{2013}+1235\cancel{7}} \leq \left(\frac{2013\alpha}{105264-\alpha^2}\right)^p \quad (\star)$$

Il primo membro di quest'ultima può essere maggiorato come segue:

$$\frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x|+p|y|^{2013}+1235\cancel{7}} \leq \frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x|+|y|+2012+2013} =$$

$$= \frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{(|x|+|2012|)+(|y|+|2013|)} \leq \frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x+2012|+|y+2013|} \leq 1 .$$

Pertanto è:

$$\frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x|+p|y|^{2013}+1235x} \leq 1$$

Ricerchiamo $\bar{\alpha}$ in modo tale che $\frac{2013\bar{\alpha}}{105264-\bar{\alpha}^2}=1$

Se $\bar{\alpha}\in\mathbb{N}$ allora $\bar{\alpha}$ è un ottimo candidato ad essere la soluzione del problema.

In effetti:

$$\frac{2013\bar{\alpha}}{105264-\bar{\alpha}^2}=1 \Rightarrow \alpha^2+2013\alpha-105264=0$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{-2013\pm\sqrt{2013^2+4\cdot 105264}}{2}$$

$$=\frac{-2013\pm 2115}{2} \begin{cases} \alpha_1=51\in\mathbb{N} \\ \alpha_2<0 \end{cases}$$

Inoltre $105264-\alpha_1^2>0$; pertanto, per tale α_1 risulta vera anche la (*).

D'altro canto, è lecito chiedersi se vi possono essere costanti più piccole di 51 che verificano la (*)

Osserviamo che se $0<\alpha<51$, $\frac{2013\alpha}{105264-\alpha^2}<1$ (verifica). Tuttavia nessuna costante inferiore può risolvere il problema, perché, ad esempio

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y \text{ fissato} \\ p \text{ fissato}}} \frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x|+p|y|^{2013}+1235x}=1$$

Di conseguenza $\forall\varepsilon>0$ esistono sempre $x\in\mathbb{R}$ tali che

$$\frac{\big||x+2012|-|y+2013|\big|}{|x|+p|y|^{2013}+1235x}>1-\varepsilon \quad \text{(def. di limite)} \blacksquare$$