Brescia, 1 febbraio 2013

Allenamenti di matematica
Geometria

1. È data una piramide avente per base un quadrilatero $ABCD$ e vertice V, inscritta in una sfera. Si sa che $AD = 2BC$, e che le rette ottenute prolungando AB e CD si incontrano in un punto E dalla parte del segmento BC. Calcolare il rapporto tra il volume della piramide avente per base il triangolo AED e vertice V e il volume della piramide data.

2. Sia ABC un triangolo isoscele con $AB = AC$. Si supponga che la bisettrice dell'angolo ABC incontri il lato AC nel punto D e che $BC = BD + AD$. Si determini l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C$.

3. Una sfera di raggio $R = 15\,\text{cm}$ è appoggiata su due binari paralleli distanti tra loro $24\,\text{cm}$. Se la sfera effettua una rotazione completa, di quanto avanza sui binari?

4. La regina del pianeta Esagono conserva gelosamente un diamante con 2013 facce esagonali. Quanti vertici ha il prezioso gioiello?

5. Trovare il percorso minimo sulla superficie di un cono (girando intorno ad esso) partendo da un punto sullo spigolo di base del cono e ritornando al punto di partenza. Il cono ha superficie laterale $A = \frac{1}{2}\pi a^2$, dove $a = 2013$ è l'apotema del cono.

6. Un matematico vive nel punto A, due suoi colleghi nei punti B e C. Sapendo che $AC = 13$, $BC = 40$ e $AB = 37$ trovare la via più breve che il matematico deve percorrere per arrivare in H, sapendo che AH è l'altezza del triangolo ABC.

7. Da un punto P esterno ad una circonferenza di centro O, traccia una semiretta che incontra la circonferenza in A e in B. Qual è il luogo dei punti medi dei segmenti PB? Qual è il luogo dei punti medi dei segmenti PA?

8. Si scelgano i punti H, K, M sui lati di un triangolo ABC in modo tale che AH sia un'altezza, BK sia una bisettrice e CM una mediana. Si indichi con D l'intersezione tra AH e BK e con E l'intersezione tra HM e BK. Sapendo che $KD = 2$, $DE = 1$, $EB = 3$,

   i) si dimostri che HM è parallelo ad AC,

   ii) si dimostri che $AB = AC$,

   iii) si dimostri che $AB = BC$.

9. Il triangolo rettangolo ABC ha ipotenusa $AB = a > 0$ e l'angolo $C\hat{A}B = 60°$. Si descriva internamente al triangolo con centro in B e raggio $a/3$ l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto AC dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si determini l'area di $PQCR$. Il triangolo ABC è poi la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni ottenute tagliandolo con dei piani perpendicolari ad AB sono tutti quadrati.

10. È assegnata una sfera di raggio pari a $1.6\,\text{m}$. Si determinino il cono retto, inscritto nella sfera, di area laterale massima e il cono retto, circoscritto alla medesima, di volume minimo. Si determini il valore della differenza delle capacità dei due coni.

11. Si considerino nel piano cartesiano i tre punti $A = (3, 4.5)$, $B = (2, 3)$ e $C = (3, 0)$. Si richiede di individuare le coordinate del punto del piano H tale da rendere minima la somma $d(A, H) + d(B, H) + d(C, H)$.

12. Sono assegnati i punti $A = (2, 2, 1)$, $B = (2, 3, 1)$, $C = (4, 1, 3)$ e $D = (4, 3, 3)$. Si determini il punto H della retta passante per B e D che minimizza la somma $d(A, H) + d(C, H)$.