

Allenamenti di matematica: Simulazione di Gara

24 febbraio 2012

Le risposte vanno indicate con una sequenza di 4 cifre; se la risposta contenesse più di 4 cifre, andranno indicate solo le ultime 4. Se la risposta contenesse meno di 4 cifre è necessario anteporre la cifra 0 quante volte occorre.

1. **Découpage.** Qual è il numero minimo di triangoli necessari a ricoprire un cubo (senza sovrapposizioni)?

[Sol. 0004]

2. **Cameriere spazientito.** Tre coppie di amici cenano insieme in un ristorante. Dopo aver ritirato i piatti del secondo, il cameriere chiede se desiderano anche il dolce: “Siamo tutti molto golosi, quindi prenderemo sicuramente più di due porzioni di dolce” inizia Carlo.

“Andrea o Carlo prendono sicuramente il dolce”, dice Flavia, “mentre io lo prendo se lo prende Carlo”. A quel punto interviene Bianca: “Io prendo il dolce se e solo se Carlo non lo prende, mentre Erica prende il dolce se e solo se lo prende anche Carlo”.

“Solo uno fra me ed Andrea prende il dolce se lo prende Erica”, dichiara allora David, “mentre, alla fine, Flavia lo prenderà se e solo se lo prendiamo sia io sia Bianca”.

“Ora tutto chiaro?”, conclude Erica rivolta al cameriere. “Certo” risponde lui, “è così chiaro che sapete cosa vi dico? Chi vuole il dolce se lo vada pure a mangiare da un'altra parte”.

Ma chi voleva il dolce? Dare la risposta indicando nell'ordine:

- quante persone volevano il dolce;
- fra queste quante erano le donne;
- un 2 se Andrea desiderava il dolce e un 3 in caso contrario;
- un 4 se Erica desiderava il dolce e un 5 in caso contrario.

[Sol. 4225]

3. **A spasso sul cubo.** Fissato un vertice V di un cubo, quanti percorsi orientati si possono tracciare lungo gli spigoli del cubo che partono e tornano in V , e toccano una e una sola volta tutti gli altri vertici?

[Sol. 0012]

4. **Murales matematico.** Un matematico vuole dipingere un murales su una parete quadrata di lato $13m$. Il motivo è così fatto: cotruisce, adiacente al lato AB , un quadrato interno di lato $11m$, un altro di lato $8m$, uno di lato $5m$ ed un ultimo di lato $\sqrt{2}m$, ciascuno avente punto medio M del lato nel punto medio di AB . Ripete la stessa costruzione sul lato BC , ottenendo così un motivo a scacchiera che decide di colorare con due vernici, rossa e blu, in modo che due colori uguali non risultino mai adiacenti l'uno all'altro. La vernice rossa costa 1 Euro al m^2 e la blu costa 2 Euro al m^2 . Trovare la spesa minima possibile (espressa in Euro e troncata all'unità considerando $\sqrt{2} = 1.4142$).

[Sol. 0252]

5. **Operazioni semplici.** Su un numero possiamo effettuare solo due operazioni: raddoppiarlo o aggiungere 1. Con quante di queste operazioni, al minimo, possiamo trasformare 0 in 2012?

[Sol. 0018]

6. **Torre di Hanoi.** La torre di Hanoi è un gioco costituito da tre paletti nel primo dei quali è infilata una torre di dischi ordinati secondo dimensione (in alto i più piccoli...). Scopo del gioco è di spostare la torre all'ultimo paletto, rispettando le seguenti regole:

- si può spostare un solo disco alla volta, e solo il disco posto più in alto in una colonna;
- non si può mai appoggiare un disco più grande sopra ad un altro più piccolo.

Trovare il minimo numero di mosse per concludere il gioco quando il numero di dischi è pari a 11.

[Sol. 2047]

7. **Numeracci.** La scrittura decimale di 2^{29} è un numero di nove cifre e contiene nove delle dieci cifre. Quale manca?

[Sol. 0004]

8. **Radici e non solo.** Sia dato il polinomio $x^3 + ax^2 + bx + 42$. Sapendo che una sua radice risulta 3 e che $ab = 5\sqrt{7} + 21$, trovare il più piccolo valore possibile di $|a + b|$. Indicare, nell'ordine, le due cifre prima della virgola e le due cifre dopo la virgola, considerando $\sqrt{7} = 2,65$.

[Sol. 1170]

9. **Tutti in fila.** Sono dati sei numeri interi positivi in ordine strettamente crescente tali che ogni numero, eccettuato il primo, sia un multiplo del precedente, e che la somma dei sei numeri sia 79. Quanto vale il numero più grande?

[Sol. 0048] Sugg. $a_4 = 8, a_5 = 8a, a_6 = 8ab \dots$

10. **Successioni pericolose.** È data una progressione aritmetica di 137 numeri interi, uno dei quali è 0. La somma dei termini della successione è 10001. Quanto può valere al massimo il termine più grande della successione?

[Sol. 5037]

11. **Poker.** Alberto vuole organizzare per questa sera una partita di poker. Egli sa che Bruno e Barbara si recano in palestra insieme una sera su tre, e che Carla, Corrado, Dario e Davide sono impegnati una sera su due (ma non necessariamente negli stessi giorni). Inoltre, sa che Dario non vuole giocare con Davide, poiché questi gli ha portato via la ragazza (ma se Dario e Davide sono entrambi liberi, uno di loro può giocare). Poiché per giocare a poker occorrono almeno quattro persone (compreso Alberto), qual è la probabilità che stasera si giochi? Dare come risposta le prime 4 cifre dopo la virgola.

[Sol. 6875]

12. **Compleanno.** A una festa di compleanno quattro giocattoli vengono estratti a sorte fra i tre ragazzi presenti. I sorteggi sono indipendenti, ovvero tutti i ragazzi partecipano a tutti i sorteggi. Qual è la probabilità che vi sia almeno un ragazzo che resta privo di giocattoli? Dare come risposta le prime 4 cifre dopo la virgola.

[Sol. 5555]

13. **Volò accelerato.** Una farfalla notturna si muove per 2 secondi su una traiettoria rettilinea e percorre 1 m, poi piega di 45 gradi a destra e in 1 secondo percorre (sempre in modo rettilineo) $1/\sqrt{2}$ volte 1 m, poi piega di 45 gradi a destra e percorre in $1/2$ secondo $1/\sqrt{2}$ volte la precedente distanza, e così via. A quale distanza, espressa in mm, dal punto iniziale si troverà dopo 4 secondi?

[Sol. 1414]

14. **Dannati romani.** Abelix e Borelix hanno inventato un nuovo gioco per passare il tempo prima di partire per l'Egitto. Ogniqualvolta mettono fuori combattimento una pattuglia di soldati romani, chiedono a due di loro di scegliere a caso, ciascuno indipendentemente, un divisore di 12!; se i due numeri hanno massimo comun divisore uguale a 1 vince Borelix, altrimenti vince Abelix. Qual è la probabilità di vittoria di Abelix? Come risposta fornire le prime 4 cifre dopo la virgola.

[Sol. 9834]

15. **Guanti spaiati.** In quanti modi possono essere distribuiti a 5 persone un guanto destro e uno sinistro, presi da 6 paia di guanti distinguibili, in modo tale che nessuna persona indossi un paio coordinato? (quindi tutti devono sempre avere un guanto destro e uno sinistro ma devono essere spaiati). Indicare solo le ultime 4 cifre se il risultato è maggiore di 9999.

[Sol. 2480]

16. **Somme potenti.** Trovare le prime quattro cifre della somma

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + 97^3 + 99^3,$$

quando è scritta in notazione decimale.

[Sol. 1249]

17. **Una curiosa coincidenza.** Recentemente è stata notata una curiosa coincidenza. Tutti i più grandi matematici nella storia del villaggio della Retta hanno avuto per forza vitale un intero positivo N tale che esistono $a_1, a_2, \dots, a_{2007}$ interi positivi per cui $a_1 < a_2 < \dots < a_{2007}$ e

$$N = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{2007}{a_{2007}}.$$

Trovare la somma di tutti i valori N possibili di forza vitale (indicare le ultime 4 cifre di tale somma se il risultato è maggiore di 9999).

[Sol. 5028]

18. **Furto intelligente.** Una banda di ladri vuole aprire la cassaforte di una banca. Un basista ha fatto ubriacare il direttore della banca ed è riuscito a sapere che:

- la combinazione è formata da 5 cifre tra 0 e 9;
- la combinazione è un numero pari;
- esattamente una delle cifre è dispari;
- nella combinazione compaiono 4 cifre diverse, la cifra ripetuta è pari e compare in due posizioni non consecutive.

Quante sono le possibili combinazioni?

[Sol. 4500]

19. **Valori condizionati.** Dati tre numeri interi a, b, c in modo che $a, b, c, a + b - c, b + c - a, c + a - b, a + b + c$ siano sette numeri primi distinti, indichiamo con d la differenza fra il più grande e il più piccolo di questi numeri primi. Sapendo che 800 è un elemento dell'insieme $\{a + b, b + c, c + a\}$, determinare il massimo valore di d .

[Sol. 1594] Sugg. a, b, c dispari, allora maggiori o uguali a 3. assumiamo $a + b = 800$, dunque $c < 800$. $799 = 17 \cdot 47$, allora $c \leq 797$. allora $a + b + c \leq 800 + 797 = 1597$. allora $d \leq 1597 - 3 = 1594$. Scelgo $a = 13, b = 787, c = 797$, dunque $a + b - c = 3, a + b + c = 1597$ e altri primi, quindi $d = 1594$.

20. **Angoli e triangoli.** In un generico triangolo ABC, AE è la bisettrice dell'angolo in A e BH è un'altezza. L'angolo in A è acuto, e l'angolo AEB misura 45 gradi. Quanti gradi misura l'angolo EHC?

[Sol. 0045]