

Allenamenti di matematica: Combinatoria e Probabilità

1. *Moneta sonante*

Si hanno 3 monete aventi facce di colori diversi: la prima ha due facce bianche, la seconda due facce nere e la terza una faccia bianca e una faccia nera.

- (a) Qual'è la probabilità che lanciando una moneta a caso esca una faccia bianca?
- (b) E qual'è la probabilità che con due lanci consecutivi di due monete scelte a caso tra le tre (dopo il primo lancio si inserisce la prima moneta) si ottenga la sequenza faccia bianca-faccia nera?

2. *Estrazione juventina*

Ogni anno un gruppo di supporter juventini partecipa ad una lotteria autoprodotta. L'obiettivo è quello di estrarre dall'urna, rigorosamente in quest'ordine, prima una pallina nera e poi una pallina bianca. Dato che negli ultimi anni la lotteria era però in perdita, uno degli ideatori decide di fare in modo che il gioco sia più difficile e inserisce nell'urna 16 palline di cui 13 bianche e 3 nere.

Determinare la probabilità che la prima pallina estratta sia nera e, senza reinserimenti, la seconda estratta sia bianca.

3. *Affare! Brioches gratis!*

In un paese, un fornaio provava a svendere le brioches avanzate dal giorno prima. Ad ogni aspirante acquirente dava in mano 2 dadi: se la somma dei dadi lanciati avesse fatto 4, avrebbe avuto 2 brioches gratis, se la somma dei dadi avesse fatto 11, ne avrebbe avute 2 ma 1 l'avrebbe dovuta pagare, con qualsiasi altro risultato avrebbe dovuto pagare il prezzo intero.

- (a) Qual'è la probabilità di ricevere gratis 2 brioches?
- (b) Qual'è la probabilità di pagarle a metà prezzo?
- (c) E la probabilità di fare, comunque, un affare?

4. *Tagliatore di teste*

Un drago ha 100 teste. Un cavaliere può staccare 15, 17, 20 o 5 teste con un solo colpo di spada. Ogni volta, però, dalle spalle del drago ricrescono rispettivamente 24, 2, 14 e 17 nuove teste. Il drago muore solo se gli vengono staccate tutte le teste. Riuscirà il cavaliere ad uccidere il drago?

5. *Scacchiera invariante*

Data una scacchiera 8 per 8 con la classica colorazione (32 case bianche e 32 nere) sono consentite le seguenti mosse:

-
- (1) Ricolorare (ovvero cambiare di colore a) tutte le case di una riga o di una colonna.
 - (2) Cambiare il colore a tutte le case di un quadrato 2×2 .

Posso rimanere con una sola casa nera e 63 bianche?

6. **Oggetti pesanti**

Ci sono 128 oggetti di peso diverso, determinare il minimo numero di confronti da fare per trovare l'oggetto piú pesante e il secondo piú pesante.

7. **Multipli**

Quel é la probabilitá che, estratti due numeri a caso (anche uguali) compresi tra uno e dodici (estremi inclusi), il loro prodotto sia multiplo di 5?

8. **Tombola al 7x5**

Prendendo un numerino della Tombola (vanno da 1 a 90) calcola la probabilitá che contenga la cifra 7 oppure che sia multiplo di 5.

9. **Tennis**

Due giocatori di pari livello disputano un incontro di tennis. Vince il giocatore che si aggiudica per primo tre partite. Qual é la probabilitá che si renda necessario disputar la bella (ovvero la quinta partita), supponendo che i risultati dei vari incontri siano eventi indipendenti?

10. **Compleanno**

A una festa di compleanno quattro giocattoli vengono estratti a sorte fra i tre ragazzi presenti. I sorteggi sono indipendenti, ovvero tutti i ragazzi partecipano a tutti i sorteggi. Qual é la probabilitá che vi sia almeno un ragazzo che resta privo di giocattoli?

11. **Permutazioni e paritá**

Sia a_1, a_2, \dots, a_n una permutazione di $1, \dots, n$ con n dispari. Allora

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \dots (a_n - n)$$

é pari.

12. **Riunione all'ONU**

All'ONU é in corso una riunione e 3 americani, 4 francesi, 4 danesi e 2 italiani si devono sedere in una stessa fila di sedie, facendo in modo che persone della stessa nazionalitá siano sedute una vicina all'altra. In quanti modi si possono disporre? E se dovessero sedersi attorno ad un tavolo rotondo?

13. **Disposizione di Triangoli**

Silvia ha 2012 tessere identiche a forma di triangolo equilatero e vuole disporle sul tavolo senza sovrapporle in modo che ciascuna abbia esattamente 2 lati in comune con altre 2 tessere. Può riuscire nel suo intento?

14. **Scacchiera colorata**

Sia data una scacchiera rettangolare 4×7 colorata casualmente con due colori (rosso e nero). Dimostrare che esiste un rettangolo coi quattro spigoli dello stesso colore (vedi figura).

Bonus question: É vero anche per una scacchiera 4×6 ?

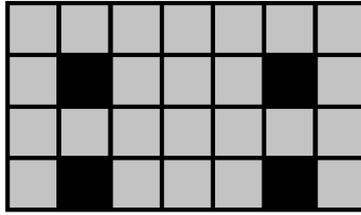


Figura 1: La scacchiera colorata. Esempio di rettangolo con spigoli dello stesso colore.

15. ***Cena Insidiosa***

$2n$ ambasciatori sono stati invitati ad una cena. Ogni ambasciatore ha al più $n - 1$ nemici (l'inimicizia è reciproca). Dimostrare che è possibile disporre gli ambasciatori ad un tavolo circolare in modo che nessuno sieda vicino ad un nemico.

16. ***Affettando torte..***

- (a) In quanti settori al max si può dividere una circonferenza (o un piano) con n rette?
- (b) In quante regioni al max si può dividere una torta (o lo spazio) con n piani ?
- (c) In quanti settori al max si può dividere il piano con n circonferenze?
- (d) In quante regioni al max si può dividere lo spazio con n sfere?

17. ***Convegno Linguistico***

Nove delegati vanno ad un convegno. Ciascuno parla al più tre lingue e comunque presi tre delegati almeno due parlano la stessa lingua. Dimostrare che esiste una lingua parlata da almeno tre persone.